内蒙古学术书林

格论初步

陈杰 著

NEIMENGGU
XUESHUSHULIN

内蒙古大学出版社

责任编辑：戴其芳
封面设计：赵齐坤

ISBN7—81015—044—8
O·7　　　定价：3.20元

格论初步

陈　杰

内蒙古大学出版社

格　论　初　步

陈杰　著

内蒙古大学出版社出版发行

内蒙古新华书店经销

内蒙古天伦彩印厂印刷

开本：787×1092／32　印张6.25　字数132千

1990年10月第一版第一次印刷

印数1—2000册

ISBN7—81015—044—8／0.7（课）

定价：3.20元

序　言

本书是作者从 1982 年起，在内蒙古大学数学系为研究生和本科高年级生开设格论选课时编写讲义的基础上修订而成的．这是一本入门书，因而取材都是最基本的．

在我国，这样一本格论入门书，似乎早就应该有了，但是事实却并不这样．格论作为一个数学分支（更确切说是抽象代数的一个分支），是在三十年代奠定基础的．它的标志就是写于 1937-39 年的 Garrett Birkhoff 的巨著《Lattice Theory》在 1940 年的出版问世．这个新的数学理论一经确立,它的发展是极为迅速的．仅八年之后，即 1948 年，《Lattice Theory》刊出了它的第二版．仅就其篇幅而言，差不多就比第一版增加了一倍，由此不难想像这个新理论有着何等旺盛的生命力了．

一个有趣的事实是，该书第二版问世不久，新中国成立之初的 1951 年，我国龙门书店就影印出版了这本名著．但意外的是，这次影印发行似乎在国内并没有产生多大影响．就作者所知，整个五十年代在我国几乎没有人在格论方面进行过工作（至少就已发表著作来看）．唯一的例外是北师大的王世强先生．他在同余关系方面做过很好的工作．但他很可能是从数理逻辑的角度接近了这些问题因而不是一个持续的格论工作者．向国内做格论介绍的还有关肇直先生．他在著作《拓扑空间概论》中曾撰写了一章讲拓扑格（他把它叫做拓扑络）但没有牵涉到格的一般理论．1964 年，在我国出版了两本有关格论的书．一本是杨宗磐先生的《半序空间引论》．书中讨论了半序群、格群和有关论题．但杨先生的

着眼点是泛函分析，而不在格论本身．另一本确是格论专书，书名就叫《格论》．但这是一本译著，作者是日本的中山正，由河北大学的董克诚先生翻译介绍的．此后就是大家知道的十年动乱了．不管怎样，似乎直到文化大革命以后，我国学者才又开始关注格论这一值得重视的数学理论．这距离龙门书店在我国影印发行《Lattice Theory》（第二版）差不多已过去了三十年．

按本书作者的浅见，我国学者再次关注格的理论，很可能与模糊数学在全世界的崛起有关．当然与五十年代以来格论本身的飞速发展也大有关系．近年来，从不同角度出发对格论及有关领域进行的研究工作已在我国逐步开展．我们内蒙古大学数学系的几个同志正是这个新的学术队伍中的几个小兵．我们希望在与全国同志们一起开展格论的学习和研究中贡献我们的一点微薄的力量．

鉴于在我国至今还没有一本国人编写的格论的著作，也由于中山正的书（原书在日本成书于五十年代初）已远不能反映今天格论大大发展了的面貌，作者在内蒙古大学出版社同志们的鼓励下，把这本讲义整理成篇，呈献在读者的面前．我们希望通过这本入门书有更多的、特别是年轻的同志能和格论交上朋友．我们也毫不迟疑地相信，对于在数学其它领域从事工作的同志也不会毫无收益，如果他愿意花点时间来浏览一下本书内容的话．由于作者水平所限，本书中定有考虑不周、甚至发生错误的地方，希望海内学人，不吝赐教．

本书的编写深受 G.Gratzer 1978 年出版的名著《General Lattice Theory》的影响，首先我们采用了他的重要观点：只对格的一般理论基础进行分析．作者认为，对于一本

入门书这样做恐怕尤其合适。本书大部分取材于该书，全部内容则来自书后所附的参考文献。我们只在很少的地方（例如关于自由格的存在证明）提出过稍不同于一般的自己的处理方法。

本书使用了缩写符号 ⇒ 和 ⇔ 。A ⇒ B 的意思是从 A 可以推出 B；A ⇔ B 则是说在逻辑上 A 和 B 是等价的。在引述前文时，词语“定理 5”指的是本节中的定理 5；“定理 3.5”则说的是本章第三节中的定理 5；而“定义Ⅱ.1.14”则更进一步是第二章第一节中的定义 14。为清楚计，我们在每一次证明的末尾加注符号 】以示论证结束。

在本书编写的过程中，数学系同仁赵萃魁教授和王大彬讲师曾审阅手稿并提出过重要的修改建议。刘满、李文义、高启、杜清晏、石琳和张昆龙等同学也提出过许多意见，使本书疏漏之处得以大量减少。对于这些诚挚的帮助，作者深为感动并在此致谢。还要特别对内蒙古大学出版社的同志们表示深切的谢意。在当前学术著作出版难的异常环境下，本书虽然还算不上是学术专著，但因涉及较专门的学术领域，也肯定是“赔钱货”。内大出版社以扶植学术研究弘扬科学教育为己任，毅然出版本书，这恐怕不只应由作者一人在此来深致谢忱了。

陈　杰

一九八八年十月于呼和浩特

目 录

第一章　基本概念

§1. 偏序集

非空集 P 上的一个二元关系 $\rho \subseteq P\times P$ 称为一个偏序，如果对一切元 $a,b,c \in P$ 都有

(P1) $a\rho a$ (自反性),

(P2) $a\rho b$ 又 $b\rho a \Rightarrow a=b$(反对称性),

(P3) $a\rho b$ 又 $b\rho c \Rightarrow a\rho c$(传递性).

定义 1. 非空集 P 连同 P 上定义的一个偏序关系 ρ 构成一个序结构(P,ρ),称为一个偏序集

偏序集在数学中大量出现, 以下是几个例子:

例 1. $\mathbb{R}$是实数集, $\rho=\leqslant$是普通的顺序关系, $(P,\rho)=(\mathbb{R},\leqslant)$是一个偏序集.

例 2. $P=P(X)$是集 X 的幂集, $\rho=\subseteq$ 或 $\supseteq$ 是 X 的子集的包含关系,$(P(X),\subseteq)$和$(P(X),\supseteq)$都是偏序集.

例 3. $P=\mathbb{N}$是自然数集,$\rho=\mid$是整除关系,即 $a,b\in\mathbb{N}$时,$a\mid b$ 的意思是 a 整除 b. $(\mathbb{N},\mid)$是偏序集.

例 4. 对于一个群 G,设 $P=\{H\mid H\subseteq G$ 是 G 的子群$\}$, $\rho=\subseteq$是集包含关系.

例 5. 对于环 R,$P=\{I\mid I\subseteq R$ 是 R 的理想$\}$,$\rho=\subseteq$也是集包含关系.

例 6. P 是三维欧氏空间中全部点、直线和平面作成的集,$a,b\in P$ 时,$a\rho b$ 的意思是 a 在 b 上.

下面是一个非数学的例.

例 7. 设 P 是一个特定的人群,$a,b \in P$ 时,$a\rho b$ 的意思是：或者 a,b 是同一个人,或者 a 是 b 的后代. 很明显,这里 (P,ρ) 也作成一个偏序集.

从以上例子可以看出：(i)偏序集是一种广泛存在的数学结构;(ii)偏序集包含两个要素,一个非空集 P 和 P 上定义的一个偏序关系 ρ. 两者缺一不可. 如例 2 所示,在同一个集 $P=P(X)$ 上,由于 $\rho=\subseteq$ 和 $\rho=\supseteq$ 的不同,我们得到两个不同的偏序集. 例 1 中取 $\rho=\geqslant$ 或例 3 中取 $\rho=\leqslant$ 或 $\rho=\geqslant$ 都得到另外的偏序集;(iii)偏序集中并非任意两元间都有关系 ρ,如例 2 中并非 X 的任意两个子集 S 和 T 间总有 $S\subseteq T$ 或 $T\supseteq S$ 的关系. 例 3 中元 3 与 5 间也没有整除关系,我们既没有 $3 \mid 5$,更没有 $5 \mid 3$.

今后我们把偏序集中有偏序关系的两个元称为是可比的,否则是不可比的. 例 3 中,3 与 5 不可比,但 3 与 6 可比. 例 6 中,任意两个不同点,两条不同直线或两个不同平面都不可比.

下面两种极端情况都是重要的.

定义 2. 如果偏序集 (P,ρ) 还满足条件

(P4)对一切 $a,b \in P$,总有 $a\rho b$ 或 $b\rho a$(线性),

则我们称 (P,ρ) 是一个**全序集**,也称为一个**链**. 这时,序关系 ρ 称为 p 上的一个**全序**.

如果 (P,ρ) 中任意两元均不可比,则 (P,ρ) 称为是**无序的**. 无序的偏序集实际上就是一个普通的非空集. 这时,偏序 ρ 无实际意义.

例 1 中的 $(\mathbb{R},\leqslant)$ 是全序集的例. 有理数集 $\mathbb{Q}$,整数集 $\mathbb{Z}$ 或自然数集 $\mathbb{N}$,当 ρ 取作 $\leqslant$ 或 $\geqslant$ 时都作成全序集.

今后我们将永远把偏序集(P,ρ)中的偏序关系ρ改写成$\leqslant$,并借用习惯用语把它读作"小于(或)等于". 但我们应注意这只是一种符号的使用. 对于一个偏序集$(P,\leqslant)$,偏序关系$\leqslant$的实际含义是什么是要根据具体讨论的问题来定的. 如果$(P,\leqslant)$是例1中的偏序集,则这里的$\leqslant$正好是比较实数大小的小于(或)等于关系. 但如果$(P,\leqslant)$是例2中的偏序集,则这时 $\leqslant=\subseteq$ 或 $\supseteq$ 就是完全不同的东西. 但我们同意,即使这时我们也把它读作"小于(或)等于".

当偏序关系采用了比较实数大小的符号$\leqslant$之后,我们就可以在偏序集中也引进实数系中常用的符号$<,\geqslant,>$,以及$\nleqslant$, $\ngeqslant$等等. 我们规定$a,b\in P$时,$a<b$的含义是$a\leqslant b$但$a\neq b$,并且也读作"a 小于 b". 当$a\leqslant b$时,我们也可以改写成$b\geqslant a$,读作"b 大于(或)等于 a". 类似地,$a>b$的意思是$a\geqslant b$但$a\neq b$(读作"a 大于 b"). $a\nleqslant b$或$a\ngeqslant b$等符号的含义都是容易理解的.

我们把偏序关系ρ改写成$\leqslant$并不会引起混乱. 相反地,它有其方便处. 从上面所说的我们可以借用$<,\geqslant,>$等习用符号已经可以看到,而且今后我们还会看到更多的方便之处. 我们需要注意的只是,绝不要把它与普通数系中的顺序关系混淆起来,记住它对每个具体的偏序集都有其特定含义就是了. 相信读者会很快熟习这个用法并感受到它的方便之处的.

现在设$(P,\leqslant)$为一偏序集. 很明显,二元关系$\geqslant$也是P上的一个偏序关系. 因此,$(P,\geqslant)$也作成一个偏序集. 事实上,对于$\geqslant$,(P1),(P2)显然成立. 如有$a,b,c\in P$,$a\geqslant b$又$b\geqslant c$,则按$\geqslant$的定义有$c\leqslant b$,$b\leqslant a$从而由$\leqslant$的传递性知道有$c\leqslant a$,即有$a\geqslant c$,故对$\geqslant$(P3)也成立.

定义 3. 设$(P,\leqslant)$为一偏序集,对 P 规定一个新的二元关系$\leqslant_1$如下：对一切 $a,b\in P$

$$a\leqslant_1 b \quad \Leftrightarrow \quad b\leqslant a$$

则$\leqslant_1$为一偏序关系(实际上它就是$\geqslant$). 偏序集$(P,\leqslant_1)(=(P,\geqslant))$称为偏序集$(P,\leqslant)$的对偶(偏序集).

很明显,上述对偶关系是相互的. 当$(P,\leqslant_1)$是$(P,\leqslant)$的对偶时,$(P,\leqslant)$也是$(P,\leqslant_1)$的对偶. 就是说, 偏序集$(P,\leqslant)$与$(P,\geqslant)$互为对偶.

现在,假设我们有一个关于偏序集的命题 A. 如果我们把 A 中出现的一切 $\leqslant$ 和 $\geqslant$ 互换,我们得到另一个命题称为 A 的对偶命题. 例如命题"$a\leqslant b$ 又 $a\leqslant c$"的对偶命题是"$a\geqslant b$ 又 $a\geqslant c$". 关于偏序集有以下重要原则成立:

关于偏序集的对偶原则. 如果命题 A 对一切偏序集成立,则 A 的对偶命题也对一切偏序集成立.

这个原则正确,是因为每个偏序集都是它的对偶的对偶,而一个命题对一个偏序集成立的充要条件是对偶命题对对偶偏序集成立.

今后我们常把$(P,\leqslant)$简记为 P. 这一般不至引起混乱. 当我们说 P 是一个偏序集时,我们知道,这时 P 上是有一个记作 $\leqslant$ 的偏序关系的.

现在设 $P=(P,\leqslant)$是一个偏序集,$a,b\in P$ 并有 $a<b$. 如果 P 中不再有元 c 能使 $a<c<b$,则我们说元 a 被元 b 复盖,或者说 b 复盖 a,并记作

$$a\prec b \text{ 或 } b\succ a.$$

以上称谓来自偏序集的一种图示法. 我们可以用一个称为 Hasse 图的几何图形来示意偏序集的序结构. 在纸上用一个小圈圈代表偏序集中的一个元. 当 $a<b$ 时,我们把

代表 b 的圆圈画在代表 a 的圆圈之上. 当 $a \prec b$ 时,用一个线段把它们连接起来. 于是每一对可比元间(即代表它们的小圆圈间)都有一条从上到下或从下到上的折线连接它们,而不可比的元间则不存在这种折线. 这种图就是偏序集的 Hasse 图. 它非常形象地显示出偏序集的许多性质. 特别当偏序集只有有限个元时(称为有限偏序集),差不多可以一目了然. 下面是两个 Hasse 图的例子.

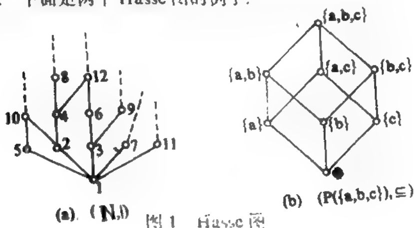


图 1 Hasse 图

现在来考虑偏序集 $P=(P,\leqslant)$ 的子集 S. 元 $a \in P$ 称为 S 的一个**上界**,如果对一切 $x \in S$ 都有 $x \leqslant a$. 如果还有 $a \in S$,则 a 是 S 的**最大元**. 很明显,当 S 有最大元时,它只有一个. 对一个元 $b \in S$,如果 S 中没有元 x 能使 $x > b$,则 b 称为 S 的一个**极大元**. 图 1 例 (a) 中,当 $S=\{1,2,\cdots,12\}$ 时,元 7,8,9,10,11,12 都是它的极大元,但 S 没有最大元. 一般说来,偏序集的极大元不唯一. 最大元显然是极大元,但反过来不对. 甚至在只有唯一极大元时,它也未必就是最大元. 图 2 中的偏序集就是一例. (图 2 见下页)

类似地,我们可以定义子集 S 的**下界**,**最小元**和**极小元**.

设偏序集 $P=(P,\leqslant)$ 的子集 S 有上界,如果上界集作为 P

的子集有最小元,则这个最小上界称为 S 的**上确界**,记作 Sup S 或 $\vee S$. 类似地,S 的最大下界(如果有的话)称为 S 的**下确界**,记作 Inf S 或 $\wedge S$.



图 2

注意在上述上下确界的定义中,我们并没有排斥作为 P 的子集的空集 Φ. 对这个特殊子集 Φ,显然任何元 a ε P 都是它的上界,因为 Φ 中没有任何元 X 不满足条件 $x\leqslant a$(事实上 Φ 中根本没有任何元). 因此,P 本身是子集 Φ 的上界集. 从而,上确界 Sup Φ = $\vee$Φ 存在的充要条件是 P 有最小元,并且这时 Sup Φ = $\vee$Φ 就是这个最小元. 同样,InfΦ = $\wedge$Φ 存在的充要条件是 P 有最大元,并且 Inf Φ = $\wedge$Φ 就是这个最大元,如果它存在的话. 如果偏序集 P 既有最大元(设为 v)又有最小元(设为 u),则对一切 x ε P 有 $u\leqslant x\leqslant v$. 这时偏序集 P 称为是**有界的**. 很明显,v 和 u 这时分别是 P 的唯一上界和唯一下界.

定理 4. **如果偏序集 P = (P, ≤)的任何子集都有上确界,则它的任何子集也必有下确界. 反之亦然.**

证明. 设 S⊆P 是 P 的任一子集. 考虑子集

$$S_* = \{x \in P \mid x \text{ 是 } S \text{ 的下界}\}.$$

按假设 a = Sup S_* 存在. 由 S_* 的定义知道,每个 s ε S 都是

S_* 的上界,故有 $a = \mathrm{Sup}\ S_* \leqslant s$,这说明 $a \varepsilon S_*$,就是说 a 是 S_* 中的最大元,也就是 $a = \mathrm{Inf}\ S$. 】

设 $P_1 = (P_1, \leqslant_1)$ 和 $P_2 = (P_2, \leqslant_2)$ 是两个偏序集. 映射 φ: $P_1 \to P_2$ 称为一个**保序映射**,如果对一切 $a, b \varepsilon P_1$ 都有

$$a \leqslant_1 b \ \Rightarrow \ \varphi(a) \leqslant_2 \varphi(b).$$

φ 称为一个**同构(映射)**,如果 φ 是一个满的单射(即在上的一一映射)并且对一切 $a, b \varepsilon P_1$ 有

$$a \leqslant_1 b \ \Leftrightarrow \ \varphi(a) \leqslant_2 \varphi(b).$$

当 P_1, P_2 间存在同构(映射)时,我们说偏序集 P_1 和偏序集 P_2 **同构**,记作 $P_1 \cong P_2$. 很明显,这时逆映射 φ^{-1} 存在,并且是从 P_2 到 P_1 的同构(映射). 同构映射当然是保序的.

很明显,有相同 Hasse 图的偏序集是同构的,但反之不然. 因为一个 Hasse 图可以有许多等价变形. 例如下图所示的两个 Hasse 图表达的是同一个偏序集:

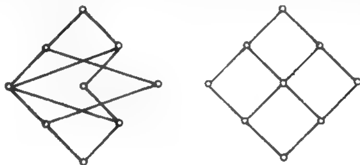


图 3

对于偏序集 $P_1 = (P_1, \leqslant_1)$ 和 $P_2 = (P_2, \leqslant_2)$,如果映射 φ: $P_1 \to P_2$ 满足条件:对一切 $a, b \varepsilon P_1$ 有

$$a \leqslant_1 b \ \Rightarrow \ \varphi(a) \geqslant_2 \varphi(b),$$

则 φ 称为一个**逆序映射**. 如果 φ 是一个双射(即满的单射)并且对一切 $a, b \varepsilon P_1$ 有

$$a \leqslant_1 b \Leftrightarrow \varphi(a) \geqslant_2 \varphi(b),$$

则 φ 称为一个逆同构(映射). 这时我们说 P_1 和 P_2 是逆同构的. 很明显,偏序集和它的对偶是逆同构的,恒等映射就是所要的逆同构映射. 逆同构偏序集的 Hassc 图是原偏序集的 Hassc 图的倒置.

§2. 格的定义

一类特别重要的偏序集是格,其定义如下:、

定义 1. 偏序集 $L=(L,\leqslant)$ 称为格,如果对任意两个元 $a,b \in L$, $\mathrm{Sup}\{a,b\}$ 和 $\inf\{a,b\}$ 都存在.

今后我们分别把 $\mathrm{Sup}\{a,b\}$ 和 $\mathrm{Inf}\{a,b\}$ 记作 $a \vee b$ 和 $a \wedge b$,并读作 a,b 的并和 a,b 的交. 因此,所谓格,就是一个其中任意二元都有并和交存在的偏序集.

我们来看一下 §1 中所举的偏序集的例中有那些是格?

例 1. $(\mathbb{R},\leqslant)$ 是格,对任意 $a,b \in \mathbb{R}$ 有 $a \vee b = \mathrm{Max}\{a,b\}$, $a \wedge b = \mathrm{Min}\{a,b\}$.

例 2. $(P(X),\subseteq)$ 是格,对任意 $a,b \in P(X)$, $a \vee b = a \cup b$, $a \wedge b = a \cap b$ 正好是集合论的并和交. $(P(X),\supseteq)$ 是 $(P(X),\subseteq)$ 的对偶,也是格.

例 3. $(\mathbb{N},|)$ 是格,对 $a,b \in \mathbb{N}$, $a \vee b = [a,b]$, $a \wedge b = (a,b)$ 分别是自然数 a,b 的最小公倍数和最大公约数.

例 4、**例 5** 都是格, $a \vee b$ 分别是 $a \cup b$ 生成的子群和理想, $a \wedge b = a \cap b$.

例 6 不是格. 因为两个不同点无下界,两个不同平面无上界. 但我们可以在 P 上添加两个元使之成为格. 添加一个最小元 0,算作它是在任何点、直线和平面上;再添加一个

最大元 1,算作一切点、直线、平面连同 0 都在 1 上. 这样, $P_1 = P \cup \{0,1\}$作成一个格.

例 7 这个非数字的例也不构成格,因为一般说来,并非任何两个人都有共同的祖先或后代.

按定义,在格 $L=(L,\leqslant)$中,对任意两元 $a,b \in L$ 都有 $a \vee b \in L$ 和 $a \wedge b \in L$. 于是 $\vee$ 和 $\wedge$ 就可以看成是 L 上的两个二元运算. 我们证明有以下事实:

定理 2. **在格** $L=(L,\leqslant)$**中,运算** $\vee$ **和** $\wedge$ **满足以下条件:**

(L1) $a \vee a = a,\quad a \wedge a = a$ (幂等律),

(L2) $a \vee b = b \vee a,\quad a \wedge b = b \wedge a$ (交换律),

(L3) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$,

$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ (结合律),

(L4) $a \vee (a \wedge b) = a,\quad a \wedge (a \vee b) = a$ (吸收律)

这里 $a,b,c \in L$ 是 L 的任意三个元.

证明. (L1),(L2)和(L4)明显成立. 我们来证明第一个结合律. 令 $x = a \vee b, y = x \vee c, z = b \vee c, w = a \vee z$,我们要证的是 $y = w$. 按定义有 $x \leqslant y, c \leqslant y$,又 $a \leqslant x, b \leqslant x$. 根据(P3)有 $a,b,c \leqslant y$,从而 $z = b \vee c \leqslant y, w = a \vee z \leqslant y$. 同理有 $y \leqslant w$,即 $y = w$ 而第一个结合律成立. 关于运算 $\wedge$ 的结合律可以类似地证明. ▌

以上讨论提示我们可以给格下另一个定义,作为有两个二元运算的代数(所谓(2,2)型代数)的定义.

定义 3. 非空(2,2)型代数 $L=(L;\vee,\wedge)$称为格. 如果运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 满足条件(L1)–(L4).

根据定理 1,原来定义下的格 $L=(L;\leqslant)$一定是新定义下的格 $L=(L;\vee,\wedge)$,只要对一切 $a,b \in L$ 取

$$(*)\quad a\vee b=\mathrm{Sup}\{a,b\},\quad a\wedge b=\mathrm{Inf}\{a,b\}$$

就行. 现在我们证明新定义下的格 $L=(L;\vee,\wedge)$ 也一定是原来偏序集意义下的格. 为此,我们先指出格 $L=(L;\vee,\wedge)$ 中总有(对一切 $a,b\in L$)

$$a=a\vee b \quad\Leftrightarrow\quad b=a\wedge b$$

事实上, $a=a\vee b \Rightarrow a\wedge b=(a\vee b)\wedge b=b\wedge(b\vee a)=b$, 又 $b=a\wedge b \Rightarrow a\vee b=a\vee(a\wedge b)=a$. 利用这个等价关系可以用 $\vee$ 和 $\wedge$ 在 L 中定义一个序关系 $\leqslant$ 如下:

$$(\S)\quad a\leqslant b \quad\Leftrightarrow\quad a=a\wedge b \quad\Leftrightarrow\quad b=a\vee b,\quad (a,b\in L)$$

不难证明,这个二元关系 $\leqslant$ 是 L 上的偏序关系.

(P1)显然成立,如同时有 $a\leqslant b$ 和 $b\leqslant a$,则 $a=a\wedge b=b\wedge a=b$,故(P2)成立. 当 $a\leqslant b$ 又 $b\leqslant c$ 时,有 $a=a\wedge b, b=b\wedge c$ 从而 $a=a\wedge(b\wedge c)=(a\wedge b)\wedge c=a\wedge c$,即 $a\leqslant c$,故(P3)也成立. 于是 $L=(L;\leqslant)$ 作成一个偏序集. 现在我们证明对任意 $a,b\in L$ 有

$$(**)\quad \mathrm{Sup}\{a,b\}=a\vee b,\ \mathrm{Inf}\{a,b\}=a\wedge b.$$

事实上,由于 $a\wedge(a\vee b)=a$ 有 $a\leqslant a\vee b$,同理 $b\leqslant a\vee b$,即 $a\vee b$ 是$\{a,b\}$的一个上界. 如果 $c\in L$ 是$\{a,b\}$的上界,则 $a,b\leqslant c$,即有 $a\vee c=c, b\vee c=c$ 从而 $(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)=a\vee c=c$. 故有 $a\vee b\leqslant c$. 这就证明了 $\mathrm{Sup}\{a,b\}=a\vee b$. 同理可证 $\mathrm{Inf}\{a,b\}=a\wedge b$. 于是 $L=(L,\leqslant)$ 是偏序集意义下的格.

如上所述,我们看到,从一个 $L=(L,\leqslant)$ 出发,用(*)式定义运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 可以得出一个作为(2,2)型代数的格 $L^a=(L;\vee,\wedge)$. 反过来,从一个(2,2)型代数的格 $L=(L;\vee,\wedge)$ 出发,我们又可以按(§)式在 L 中引进一个偏序 $\leqslant$ 使之成为一个格 $L^p=(L,\leqslant)$ 并且在 L^p 中,任意二元 a,b 的上下确界由(**)式给出. 由于(*)式和(**)式正好协调一致,我们事实上已经证明

了以下定理.

定理 4. (i)对于偏序集意义下的格 $L=(L,\leqslant)$有 $(L^{a})^{p}=L$;

(ii)对于(2,2)型代数的格 $L=(L;\vee,\wedge)$,有$(L^{p})^{a}=L$.

由于定理 4,任何格既可以看成一个(2,2)型代数,也可以看成是一个偏序集. 这两种看法都对我们有用. 但应注意,在讨论格的某些问题时,这两种看法会导致某些不完全一致的结果. 我们将在适当场合对这一点作详细说明.

现在设 $L=(L;\vee,\wedge)$是格. 我们在 L 上定义另外两个运算$\vee_1$和$\wedge_1$如下:

$$a\vee_1 b=a\wedge b,\ a\wedge_1 b=a\vee b \qquad (a,b\in L)$$

$(L;\vee_1,\wedge_1)$显然也构成一个格. 这个格中的并和交正好分别是原来格$(L;\wedge,\vee)$中的交和并. 格$(L;\vee_1,\wedge_1)=(L;\wedge,\vee)$称为格$(L;\vee,\wedge)$的对偶(格). 不难看出,作为偏序集,$(L;\vee_1,\wedge_1)$也正好是(作为偏序集的)$(L;\vee,\wedge)$的对偶. 事实上,对任意$a,b\in L$我们有 $a\leqslant_1 b \Leftrightarrow a=a\wedge_1 b=a\vee b \Leftrightarrow a\geqslant b$(这里我们把$(L;\vee_1,\wedge_1)$中的偏序记作了$\leqslant_1$),就是说$(L,\leqslant_1)$和$(L,\leqslant)$互为对偶.

上述结论反过来显然也是对的. 于是关于偏序集的对偶原则就可以转移到格上来成为关于格的对偶原则. 现在设 A 是关于作为(2,2)型代数的格 $L=(L;\vee,\wedge)$的一个命题. 如果把 A 中出现的每一个$\vee$和$\wedge$都分别换成$\wedge$和$\vee$,我们就得到命题 A 的对偶命题. 从关于偏序集的对偶原则立刻得到关于格的

对偶原则. **如果命题 A 对一切格 $L=(L;\vee,\wedge)$成立,则 A 的对偶命题也对一切格成立.**

如果格 $L=(L;\vee,\wedge)$作为偏序集有界,我们说格 L 有界

. 通常我们把格中的最大元记作 1,最小元记作 0. 于是对一切元 $a \in L$ 有 $0 \leqslant a \leqslant 1$,并且显然有以下等式成立:

$$a \vee 1 = 1,\ a \wedge 1 = a,$$

$$a \vee 0 = a,\ a \wedge 0 = 0. \qquad (a \in L)$$

由于 0 和 1 是由序关系 $\leqslant$ 刻划的,在构作一个命题 A 的对偶命题时,如果在 A 中除去出现 $\vee$ 和 $\wedge$ 外还有 $\leqslant$ 或 $\geqslant$ 和 0 或 1 出现,则我们还得把 $\leqslant$,$\geqslant$ 互换,把 0,1 也互换. 这样才能得到正确的对偶命题.

许多非常简单的有限格在格的理论中有着基本的重要性. 在结束本节之前,我们列举不多于 5 个元的 10 个有限格如下图所示:

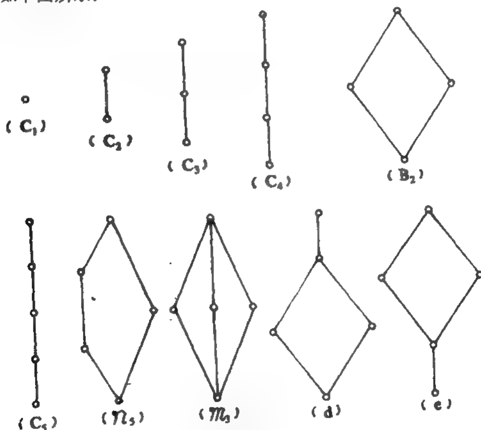


图 4

这里，$C_1,\cdots,C_5$ 分别是一元，二元，…，五元链．除 d 和 e 外，所有这些格都是自(身)对偶的．d 和 e 互为对偶．这些格中，$C_2,C_3,B_2,\mathcal{N}_5$(称为五边形)和$\mathcal{M}_3$(称为菱形)特别重要．

§3. 同态、子格和理想．

格作为一个(2,2)型代数，它自然应有作为代数概念的同态和同构概念．这些概念显然应该如下这样叙述．

定义 1. 格 $L_1=(L_1;\vee,\wedge)$到格 $L_2=(L_2;\vee,\wedge)$的映射 φ: $L_1\to L_2$ 称为一个同态(映射)，如果对一切 $a,b\in L_1$ 总有

$$\varphi(a\vee b)=\varphi(a)\vee\varphi(b),\ \varphi(a\wedge b)=\varphi(a)\wedge\varphi(b)$$

如果 φ 还是一个双射，则我们说 φ 是同构(映射)，并且说，这时格 L_1 与格 L_2 同构，记作 $L_1\cong L_2$

(注意这里我们对格 L_1 和 L_2 中的运算使用了相同的符号 $\vee$ 和 $\wedge$．这不至引起误解．例如在上述等式中，我们不难知道，两个等式左端的运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 是在 L_1 中进行的，而右端的 $\vee$ 和 $\wedge$ 则是在 L_2 中进行的．今后如无特别的需要，我们将把一切格的运算都写作$\vee$和$\wedge$.)

由于格同时又是一个偏序集．§1 中对偏序集我们已经有过一个同构的概念．它可以再转述如下：

定义 2. 格 $L_1=(L_1,\leqslant)$和 $L_2=(L_2,\leqslant)$(这里对 L_1 和 L_2 的偏序关系也使用了同一符号$\leqslant$)是同构的(记作 $L_1\cong L_2$)，如果存在一个同构(映射)$\varphi:L_1\to L_2$．就是说 φ 是一个双射并且满足条件：

$$a\leqslant b\ \Leftrightarrow\ \varphi(a)\leqslant\varphi(b)\qquad(a,b\in L_1).$$

不难证明,上述两个同构定义实际上是等价的. 事实上,如果 $L_1=(L_1;\vee,\wedge)=(L_1,\leqslant)$和 $L_2=(L_2;\vee,\wedge)=(L_2,\leqslant)$按定义 1 同构,存在双射 φ: $L_1\to L_2$ 使得对一切 $a,b\in L_1$ 有 $\varphi(a\vee b)=\varphi(a)\vee\varphi(b),\varphi(a\wedge b)=\varphi(a)\wedge\varphi(b)$. 现在假定 $x,y\in L_1$ 有 $x\leqslant y$,于是有 $x=x\wedge y$,从而 $\varphi(x)=\varphi(x\wedge y)=\varphi(x)\wedge\varphi(y)$,即有 $\varphi(x)\leqslant\varphi(y)$. 反过来如果已知 $\varphi(x)\leqslant\varphi(y)$,则 $\varphi(x)=\varphi(x)\wedge\varphi(y)=\varphi(x\wedge y)$,但 φ 是双射,所以有 $x=x\wedge y$,即 $x\leqslant y$. 于是 φ 也是定义 2 中的那种同构. 故 L_1,L_2 按定义 1 同构时它也按定义 2 同构.

反过来,当 L_1,L_2 按定义 2 同构时也必然按定义 1 同构这个证明也不难,我们留给读者作为练习来完成.

我们注意到,作为偏序集,在 § 1 中我们并没有同态的概念,而只有一个保序映射的概念. 这两者之间是有关系的,事实上我们有以下

定理 3. **同态映射一定是保序映射.**

证明 设有 $L_1=(L_1;\vee,\wedge)=(L_1,\leqslant),L_2=(L_2;\vee,\wedge)=(L_2,\leqslant)$又 φ: $L_1\to L_2$ 是一个同态. 对任意 $a,b\in L_1,a\leqslant b$,我们有 $a=a\wedge b$,于是有 $\varphi(a)=\varphi(a\wedge b)=\varphi(a)\wedge\varphi(b)$即 $\varphi(a)\leqslant\varphi(b)$,故 φ 是保序的.

我们能否期望: 作为(2,2)型代数的格同态概念就是作为偏序集的格的保序映射概念呢? 这里我们遇到格的两个不同定义带来的第一个不完全协调之处. 就是说这两者是不同的,因为定理 3 的逆定理是不成立的. 图 5(见下页)所示的是一个从 B_2 到 C_3 的保序映射,但不是格同态.

实际上,从定理 3 的证明立刻知道,只要映射 φ: $L_1\to L_2$ 满足定义 1 中等式之一, φ 就已经是保序的了. 由此,我们有以下概念.

定义 4. $\varphi: L_1 \to L_2$ 称为格 $L_1 = (L_1; \vee, \wedge)$ 到格 $L_2 = (L_2; \vee; \wedge)$ 的一个**并同态**(或**保并映射**),如果对一切 $a, b \in L_1$ 都有

$$\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b).$$

φ 称为一个**交同态**(或**保交映射**),如果对一切 $a, b \in L_1$ 有

$$\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b).$$

于是我们知道,只要 φ: $L_1 \to L_2$ 是并同态或交同态,则 φ 就已经是保序的了. 而并同态和交同态是不能互推的. 图 5 所示就是一个交同态但它不是并同态. 相反的例也不难举出.

图 5 $\varphi(a \vee b) \neq \varphi(a) \vee \varphi(b)$

下面我们引进子格的概念. 以下定义在代数结构中是典型的.

定义 5. 格 $L_1 = (L_1; \vee, \wedge)$ 称为格 $L = (L; \vee, \wedge)$ 的一个**子格**,如果

(i) $L_1 \subseteq L$ 是 L 的一个非空子集,

(ii) L_1 中的格运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 是 L 中相应运算在 L_1 中的限制.

就是说,L 的运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 在它的非空子集 L_1 上封闭时,即当 $a, b \in L_1$ 总推出 $a \vee b, a \wedge b \in L_1$ 时,$L_1 = (L_1; \vee, \wedge)$ 是

$L=(L;\vee,\wedge)$的子格.

这里应注意的是,L_1中的运算就是L中的运算. 图6中格L的非空子集$L_1=\{0,a,b,1\}$上如果规定$a\vee b=1$,其余运算与L中相同.则L_1也作成一个格,但它不是L的子格. 因为在L中有$a\vee b=c\neq 1$,即L_1中的运算不是L的运算在L_1上的限制.

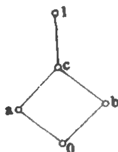


图 6

把格$L=(L;\vee,\wedge)=(L,\leqslant)$看成偏序集,格$L_1=(L,\leqslant)$作成L的子格似乎应这样来刻划: (i)$L_1\subseteq L$是L的非空子集; (ii)$L_1$中的偏序$\leqslant$是L中偏序在$L_1$上的限制. 我们发现,这个设想虽然合理,但却不能与定义5一致. 这可从刚才图6中上述子集$L_1=\{0,a,b,1\}$看出来,因为按照刚才所设想的办法,它正好做成一个"偏序的"子格,但我们已知它并非定义5意义下的子格. 这里我们迂到格的两种定义第二个不协调之处. 我们约定,今后我们谈论子格总是指的代数意义的子格,即定义5意义下的子格.

现在设$\{L_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$是格L的一族子格,则当$L_1=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}L_\lambda$非空时,它是L的一个子格,这里$\bigcap$是集合交. 事实上,对任意$a,b\in L_1$,对一切$\lambda\in\Lambda$都有$a,b\in L_\lambda$,

由于 L_λ 是子格，对一切 $\lambda \in \Lambda$ 都有 $a \vee b, a \wedge b \in L_\lambda$，从而 $a \vee b, a \wedge b \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda = L_1$，即 L_1 是 L 的子格． 由此我们有以下概念．

定义6. 设$S \subseteq L$是格L的一个非空子集，则

$$[S] = \bigcap\{L_1 \mid L_1 \supseteq S \text{是L的子格}\}$$

是 L 的子格，称为 L 中由子集 S 生成的子格． S 称为这个子格的生成元集，S 中的元是生成元． 如有 $[S] = L$，则我们说格 L 是由它的子集 S 生成．

很明显，[S]是L中包含S的最小子格．

子格的重要例子有理想，漏斗和区间．

定义 7. 格 L 的非空子集 I 称为 L 的一个理想，如果对任意 $a, b \in L$，有

(i) $a, b \in I \Rightarrow a \vee b \in I$,

(ii) $a \in I, x \in L$又$x \leqslant a \Rightarrow x \in I$.

由于对任意 $a, b \in I$ 总有 $a \wedge b \leqslant a \in I$，由 (ii)，$a \wedge b \in I$，连同 (i)，理想 I 总是 L 的子格．

定理8. 对格L的非空子集I，以下条件等价：

(i) I是L的理想，

(ii) $a, b \in I \Leftrightarrow a \vee b \in I$,

(iii) $a, b \in I \Rightarrow a \vee b \in I$，又$a \in I, x \in L \Rightarrow a \wedge x \in I$.

证明． (i) $\Rightarrow$ (ii)． I 为理想，按定义有 $a, b \in I \Rightarrow a \vee b \in I$． 反过来，当 $a \vee b \in I$ 时，由于有 $a, b \leqslant a \vee b$，按定义有 $a, b \in I$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii)． 只需证第二个论断． 因为 $a \vee (a \wedge x) = a \in I$，由 (ii) 有 $a \wedge x \in I$.

(iii) $\Rightarrow$ (i)． 设 $a \in I, x \in L$ 又 $x \leqslant a$. 由 (iii)

有 $a \wedge x \in I$. 但现在 $a \wedge x = x$, 故 $x \in I$. 】

现在设 $\{I_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ 是 L 的一族理想. 很明显, 如果集合交 $I = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ 非空, 则 I 也是 L 的理想. 由此我们有

定义9. 设 $S \subseteq L$ 是格 L 的非空子集, 则

$$(S] = \bigcap \{I \mid S \subseteq I, I \text{是L的理想}\}$$

是 L 的理想,称为由(生成元集)S 生成的理想.

对非空子集 S,(S]总存在,并且是包含 S 的最小理想.

当 $S = \{a\}, a \in L$ 为一单元集时,我们简记($\{a\}$]为(a],称为由元 a 确定的一个主理想.

对于(S]我们有以下有用的表达式.

定理 10. 对格 L 的任意非空子集 S,有

$$(S] = \{x \in L \mid x \leqslant s_1 \vee \cdots \vee s_n, s_i \in S, i = 1, \cdots, n\},$$

其中 n 是正整数. 特别对 $S = \{a\}$,有主理想

$$(a] = \{x \in L \mid x \leqslant a\}$$

证明. 令 $I = \{x \in L \mid x \leqslant s_1 \vee \cdots \vee s_n, s_i \in S, i = 1, \cdots, n\}$,我们证明 I 是一个理想. 事实上,设有 $x, y \in I$,有正整数 n,m 和 $s_1, \cdots, s_n, r_1, \cdots, r_m \in S$ 使 $x \leqslant s_1 \vee \cdots \vee s_n, y \leqslant r_1 \vee \cdots \vee r_m$,于是有 $x \vee y \leqslant s_1 \vee \cdots \vee s_n \vee r_1 \vee \cdots \vee r_m$,即有 $x \vee y \in I$. 当 $z \in L, z \leqslant x$ 时,显然有 $z \in I$. 故 I 确为一理想. 而且是一个包含 S 的理想. 另一方面,包含 S 的任一理想都包含一切 $s_1 \vee \cdots \vee s_n, s_i \in S, i = 1, \cdots, n$,n 是正整数,就是说,它包含 I,故 I 是包含 S 的最小理想,即(S] = I.

第二论断显然. 】

格 L 的理想 $I \neq L$ 时,称为一个真理想. 如果真理想 I 还满足条件:

$$a \wedge b \in I \Rightarrow a \in I \text{ 或 } b \in I,$$

则 I 称为一个素理想. 并非一切真理想都是素理想. 图 7 中真理想 P 是素理想,但 I 不是. 与理想对偶的概念是漏斗.

定义 11. 格 L 的非空子集 F 称为 L 的一个漏斗(有的作者称对偶理想),如果

(i) $a,b \in F \Rightarrow a\wedge b \in F$,

(ii) $a \in F, x \in L$ 又 $x \geqslant a \Rightarrow x \in F$.

和理想一样,L 的任何漏斗都是它的子格.

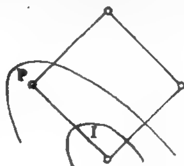


图 7

定理 12. 对格 L 的非空子集 F,以下条件等价:

(i) F是L的漏斗,

(ii) $a,b \in F \Leftrightarrow a\wedge b \in F$,

(iii) $a,b \in F \Rightarrow a\wedge b \in F$,

又 $a \in F, x \in L \Rightarrow a\vee x \in F$.

证明. 与定理8证明类同,从略. 】

和理想情形一样,如果漏斗族 $\{F_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ 有非空交 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$,则这个交集也是漏斗. 从而可以定义非空子集 $S \subseteq L$ 生成的漏斗 $[S)$,它是包含 S 的最小漏斗,并有下列明显表达式

$$[S) = \{x \in L \mid x \geqslant s_1 \wedge \cdots \wedge s_n; s_i \in S, i = 1, \cdots, n\},$$

这里 n 是正整数.

特别当 $S = \{a\}$ 为一单元集时,我们得到元 a 确定的主漏斗 $[a) = [\{a\})$,并有

$$[a) = \{x \in L \mid x \geqslant a\}.$$

漏斗 $F \neq L$ 时称为真漏斗,真漏斗 I 如果还满足条件:

$$a \vee b \in F \Rightarrow a \in F \text{ 或 } b \in F.$$

则 F 称为一个素漏斗.

理想与漏斗间有以下极为有用的关系.

定理 13. 子集 $P \subseteq L$ 是格 L 的素理想的充要条件是 $L-P$ 是 L 的素漏斗.

证明. 先设 P 是 L 的素理想,又 $a, b \in L-P$. 如有 $a \wedge b \bar{\in} L-P$,则 $a \wedge b \in P$. 由于 P 是素理想应有 $a \in P$ 或 $b \in P$,但这就与 $a, b \in L-P$ 矛盾,故只能有 $a \wedge b \in L-P$,可见 $L-P$ 是一个漏斗. ($x \geqslant a \Rightarrow x \in L-P$ 显然)现在设有 $c, d \in L$ 使 $c \vee d \in L-P$,我们来证明必有 $c \in L-P$ 或 $d \in L-P$. 这是对的,因为如有 $c, d \bar{\in} L-P$ 则 $c, d \in P$ 将导至 $c \vee d \in P$ 与 $c \vee d \in L-P$ 的假设相矛盾. 于是条件的必要性得证.

根据对偶原则,充分性也成立,因为我们有 $P = L-(L-P)$. ▌

应注意本定理对一般理想和漏斗是不成立的. 例如对图 7 中的 I, $L-I$ 根本不是子格.

定理 13 说明,格 L 的素理想与素漏斗间存在着一对一的对应关系. 事实上,它们与某种特殊同态映射间也有这种关系.

定理 14. (i) $I \subseteq L, I \neq \Phi$, I 是 L 的素理想的充要条件是存

在一个满同态 φ: $L \to C_2 = \{0,1\}$使得 $I = \varphi^{-1}(0)$.

(ii)$F \subseteq L, F \neq \Phi$,F 是 L 的素漏斗的充要条件是存在一个满同态 φ: $L \to C_2 = \{0,1\}$,使得 $F = \varphi^{-1}(1)$.

证明. 由于对偶关系,我们只证明(i).

先设 $I \neq \Phi$ 是 L 的素理想. 作映射 φ: $L \to C_2 = \{0,1\}$如下:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & (\text{当} x \varepsilon I \text{时}), \\ 1, & (\text{当} x \varepsilon L - I \text{时}). \end{cases}$$

由于 $\Phi \neq I \neq L$, φ 是一个满射. 当 $a, b \varepsilon I$ 时,有 $a \vee b, a \wedge b \varepsilon I$, 从而有 $\varphi(a \vee b) = 0 = \varphi(a) \vee \varphi(b), \varphi(a \wedge b) = 0 = \varphi(a) \wedge \varphi(b)$. 根据定理 13, $L - I$ 是漏斗,当 $a, b \varepsilon L - I$ 时有 $a \vee b, a \wedge b \varepsilon L - I$. 从而也有 $\varphi(a \vee b) = 1 = \varphi(a) \vee (b), \varphi(a \wedge b) = 1 = \varphi(a) \wedge \varphi(b)$. 剩下不妨设 $a \varepsilon I, b \varepsilon L - I$. 这时有 $a \wedge b \varepsilon I, a \vee b \varepsilon L - I$, 我们仍然得到 $\varphi(a \vee b) = 1 = 0 \vee 1 = \varphi(a) \vee \varphi(b), \varphi(a \wedge b) = 0 = 0 \wedge 1 = \varphi(a) \wedge \varphi(b)$. 故 φ: $L \to C_2$ 是同态映射. 由于 $I = \varphi^{-1}(0)$, 于是条件的必要性得证.

反过来,设有满同态 φ: $L \to C_2 = \{0,1\}$使 $I = \varphi^{-1}(0)$. 由于 φ 是满射,我们有 $\Phi \neq I \neq L$. 容易证明 I 是理想,我们证明它还是素的. 设有 $a, b \varepsilon L, a \wedge b \varepsilon I$,如果 a,b 都不属于 I,则 $\varphi(a) = \varphi(b) = 1$,从而 $\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b) = 1$ 与 $a \wedge b \varepsilon I = \varphi^{-1}(0)$矛盾,故 I 是素理想而充分性得证. (i)于是成立.

对偶地可以得到论断(ii). ▮

对格 L,把它的全部理想 I 作成的集记作 $I(L)$. 又令 $I_0(L) = I(L) \cup \{\Phi\}$. 我们有

定理 15. 对集包含关系⊆,偏序集 $I(L)$ 和 $I_0(L)$都是格.

证明. 设 $I,J \in I(L)$,由于 I,J 非空,有 $i \in I, j \in J$. 于是有 $i \wedge j \in I \cap J$,故 $I \cap J$ 非空从而它属于 $I(L)$. 很明显,我们有 $I \wedge J = \mathrm{Inf}\{I,J\} = I \cap J$. 现在我们考虑$(I \cup J] \in I(L)$. 显见它是包含 I 和 J 的最小理想,换句话说我们有 $I \vee J = \mathrm{Sup}\{I,J\} = (I \cup J]$. 这就证明了 $I(L)$是格.

以上讨论对 $I_0(L)$也同样成立,只要我们约定$(\Phi] = \Phi$. 】

利用定理 10,我们还可以有

定理 16. 在 $I(L)$中有

$$I \vee J = \{x \in L \mid x \leqslant i \vee j; \quad i \in I, j \in J\}.$$

证明. 根据定理 10,有 $I \vee J = \{x \in L \mid x \leqslant s_1 \vee \cdots \vee s_n; s_i \in I \cup J, i = 1,\cdots,n\}$. 对任意这样一个 x,如果 $s_1,\cdots s_n$ 中有些属于 I,有些属于 J. 不妨设 $s_1,\cdots,s_k \in I, s_{k+1},\cdots,s_n \in J$,这里 $1 \leqslant k < n$. 令 $i = s_1 \vee \cdots \vee s_k, j = s_{k+1} \vee \cdots \vee s_n$,我们得到 $x \leqslant i \vee j, i \in I, j \in J$. 如果全部 $s_i, i = 1,\cdots,n$ 都属于 I 或全属于 J,例如全属于 I 的情形,我们可以任取 J 中一个元 j_1,然后令 $i = s_1 \vee \cdots \vee s_n, j = s_n \wedge j_1$. 显然有 $x \leqslant i \vee j, i \in I, j \in J$. 就是说仍有同样结论. 全部 s_i 属于 J 的情形自然也一样. 】

根据上述讨论,我们可以如下这样定义任意一个非空族 $S = \{I_\lambda; \lambda \in \Lambda\} \subseteq I(L)$的并

$$\begin{aligned} \vee S &= \vee_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda \\ &= \{x \in L \mid x \leqslant i_1 \vee \cdots \vee i_n; i_j \in I_{\lambda_j}; \lambda_j \in \Lambda\}. \end{aligned}$$

对 $I_0(L)$来说,由于它有最小元 Φ,所以空族的并也存在(并等于最小元 Φ). 与之相应,对一切理想族 $S \subseteq I_0(L)$, $\wedge S = \bigcap S$ 也总存在. 但应注意,对 $I(L)$我们没有同样的结论.

定义 17. 格 L 称为完备格,如果对 L 的任意子集 S,$\vee S$ 和$\wedge S$ 都存在.

现在定理 1.4 可以改写成

定理 18. 设 $P=(P,\leqslant)$为一偏序集. 如果对一切 $S\subseteq P$ 都有$\vee S=\text{Sup } S$(或$\wedge S=\text{Inf } S$)存在,则 P 是一个完备格 ▮

由定理 15 我们还有

定理 19. 对任意格 L,$I_0(L)$总是完备格. 当 L 有最小元 0 时,$I(L)$也是完备格.

证明. 需要证明的是后一结论. 由于每个理想都包含零元 0,对任意非空族 $S\subseteq I(L)$有$\wedge S=\bigcap S$ 包含 0,故$\wedge S$ 非空,从而它属于 $I(L)$. 对空族 $\Phi\subseteq L$,由于 $I(L)$有最大元 L,$\wedge\Phi=L$ 也存在: 于是由定理 18 知道 $I(L)$是完备格. ▮

定义 20. $I(L)$称为格 L 的理想格,$I_0(L)$称为扩大的理想格.

根据完备格的定义,完备格一定有界. 因为它有最大元$\wedge\Phi$ 和最小元$\vee\Phi$.

注意到对任意元 $a,b\in L$,总有

$$(a]\vee(b]=(a\vee b],\quad (a]\wedge(b]=(a\wedge b].$$

我们有以下嵌入定理:

定理 21. 任意格 L 都可以嵌入 $I(L)$ 和 $I_0(L)$. 实际上, $a\to(a]$ 就是一个嵌入映射.

证明. 需要证明 $a\to(a]$是单射,但这不成问题. 因为当$(a]=(b]$时,有 $a\in(b],b\in(a]$,即 $a\leqslant b,b\leqslant a$ 从而 $a=b$. ▮

推论 22. 任何格都能嵌入一个完备格. ▮

作为本节的结束,我们引入有用的区间概念.

定义 23. 设 $a,b \varepsilon L$,又 $a \leqslant b$,则子格$[a,b]=\{x \varepsilon L \mid a \leqslant x \leqslant b\}$称为 L 的一个**区间**.

区间显然是 L 的子格.

当 $a \prec b$ 时,$[a,b]$称为一个**素区间**.

有的作者把$[a,b]$写成 b/a,而称它为 L 的一个**商子格**,简称**商**.

按定义,显然总有$[a,b]=(b]\cap[a)$.

§4. 同余关系、直积.

定义 1. 格 L 上的等价关系 θ 称为一个**同余关系**,如果它对运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 有下列**替换性质**:

$$a\equiv c(\theta), b\equiv d(\theta) \Rightarrow a\vee b\equiv c\vee d(\theta), a\wedge b\equiv c\wedge d(\theta).$$

和一切二元关系一样,同余关系 θ 可以看成笛卡尔积 $L\times L$ 的子集: $\theta\subseteq L\times L$ 就是说有

$$a\equiv b(\theta) \Leftrightarrow (a,b)\ \varepsilon\ \theta.$$

由于等价关系是自反的,作为 $L\times L$ 的子集,总有 $\theta\neq\Phi$,因为对一切 $a\ \varepsilon\ L$,都有$(a,a)\ \varepsilon\ \theta$.

任何格都至少有两个同余关系 ω 和 ι,其定义为(对一切 $a,b\ \varepsilon\ L$)

$$a\equiv b(\omega) \Leftrightarrow a=b,$$

$$a\equiv b(\iota) \Leftrightarrow a,b\ \varepsilon\ L.$$

换句话说,$\omega=\triangle=\{(a,a)\mid a\ \varepsilon\ L\}$是 $L\times L$ 的对角线,而 $\iota=L\times L$. 很明显,在 L 可能有的一切同余关系中,ω 和 ι 分别是最小的和最大的(按集包含关系而言)同余关系.

除 ω 和 ι 外再不具有其它同余关系的格称为**简单格**,简

称单格.不难验证,菱形$\mathfrak{M}_3$是单格,但五边形$\mathfrak{N}_5$不是.

下述定理可使验证替换性质的手续有所简化.

定理 2. 等价关系 θ 对 $\vee$ 和 $\wedge$ 有替换性质的充要条件是当 $a\equiv b(\theta)$时,对一切 $x \in L$ 有

$$a\vee x\equiv b\vee x(\theta), \qquad a\wedge x\equiv b\wedge x(\theta)$$

证明. 条件的必要性显然.

如果条件成立,设已有 $a\equiv c(\theta), b\equiv d(\theta)$,则两次用已知条件就可得到

$$a\vee b\equiv c\vee b\equiv c\vee d(\theta), a\wedge b\equiv c\wedge b\equiv c\wedge d(\theta).$$ ▮

要验证一个二元关系是否是同余关系先得验证它是一个等价关系,然后还得验证它是否有对 $\vee$ 和 $\wedge$ 的替换性质(定理2只使得后一步稍微简化了一点). 这通常需要复杂的验算. G.Gratzer 和 E.T.Schmidt 在 1958 年给出的下述判别法可以使问题大为简化:

定理 3. 一个自反的二元关系 θ 是格 L 的同余关系的充要条件是对一切 $x,y,z,t \in L$,以下三个条件成立:

(i) $x\equiv y(\theta) \Leftrightarrow x\vee y\equiv x\wedge y(\theta)$.

(ii) $x\leqslant y\leqslant z, x\equiv y(\theta)$ 又 $y\equiv z(\theta) \Rightarrow x\equiv z(\theta)$.

(iii) $x\leqslant y$ 又 $x\equiv y(\theta) \Rightarrow x\vee t\equiv y\vee t(\theta), x\wedge t\equiv y\wedge t(\theta)$.

证明. 对于必要性,我们只需验证条件(i). 由于已知 θ 是同余关系,从 $x\equiv y(\theta)$推出 $x\vee y\equiv y\vee y=y(\theta), x\wedge y\equiv y\wedge y=y(\theta)$然后从 θ 的传递性知道 $x\vee y\equiv y\equiv x\wedge y(\theta)$. 反过来,从 $x\vee y\equiv x\wedge y(\theta)$知道 $x=x\wedge(x\vee y)\equiv x\wedge y(\theta)$, $y=y\wedge(x\vee y)\equiv x\wedge y(\theta)$,再用传递性得到 $x\equiv x\wedge y\equiv y(\theta)$,故(i)成立.

对于充分性,我们设自反的二元关系 θ 满足条件(i)—(iii).我们先证明当 $a,b,x,y \in L, a\leqslant b$ 又 $x,y \in [a,b]$时,则 $a\equiv b(\theta) \Rightarrow x\equiv y(\theta)$.事实上,由于 $a\equiv b(\theta)$又 $a\leqslant b$,由(iii)有

$x\wedge y=a\vee(x\wedge y)\equiv b\vee(x\wedge y)=b(\theta)$. 由于 $x\wedge y\leqslant b$,再用(iii)得出 $x\wedge y=(x\wedge y)\wedge(x\vee y)\equiv b\wedge(x\vee y)=x\vee y(\theta)$. 由(i)我们得到 $x\equiv y(\theta)$.

θ 的对称性显然. 证明传递性,设有 $x\equiv y(\theta),y\equiv z(\theta)$. 由(i)有 $x\vee y\equiv x\wedge y(\theta)$. 由(iii),$y\vee z=(y\vee z)\vee(x\wedge y)\equiv(y\vee z)\vee(x\vee y)=x\vee y\vee z(\theta)$. 同理有 $y\wedge z\equiv x\wedge y\wedge z(\theta)$. 但从 $y\equiv z(\theta)$知到 $y\wedge z\equiv y\vee z(\theta)$. 于是我们得到 $x\wedge y\wedge z\equiv y\wedge z\equiv y\vee z\equiv x\vee y\vee z(\theta)$. 由于 $x\wedge y\wedge z\leqslant y\wedge z\leqslant y\vee z\leqslant x\vee y\vee z$,根据(ii)我们得到 $x\wedge y\wedge z\equiv x\vee y\vee z(\theta)$. 由于 $x,z\varepsilon[x\wedge y\wedge z,x\vee y\vee z]$,根据前段证得的结论,有 $x\equiv z(\theta)$. 这就证明了 θ 是一个等价关系.

现在设 $x\equiv y(\theta)$. 由(i)有 $x\wedge y\equiv x\vee y(\theta)$. 再由(iii)得到 $(x\wedge y)\vee t\equiv(x\vee y)\vee t(\theta)$. 由于 $x\vee t,y\vee t\varepsilon[(x\wedge y)\vee t,(x\vee y)\vee t]$,我们得到 $x\vee t\equiv y\vee t(\theta)$. 同理可证 $x\wedge t\equiv y\wedge t(\theta)$. 于是由定理 2,$\theta$ 是同余关系. 】

现在设 θ 是格 L 的一个同余关系. 由于 θ 是等价关系,它把 L 的元分成一些同余类. 我们把包含元 a 的同余类记作 $a\theta$,即

$$a\theta=\{x\ \varepsilon\ L\mid x\equiv a(\theta)\}.$$

很明显,$a\equiv b(\theta)\Leftrightarrow a\theta=b\theta$. 格 L 的全部同余类作成一个集

$$L/\theta=\{a\theta\mid a\ \varepsilon\ L\}.$$

这个集称为格 L 关于同余关系 θ 的商集.

我们来研究 $a\theta$ 和 L/θ 最简单的性质.

定理 4. (i)$a\theta$ 是 L 的子格,

(ii)$a\theta$ 是一个所谓凸集,就是说当 $x,y\ \varepsilon\ a\theta$ 又 $x\leqslant y$ 时,有 $[x,y]\subseteq a\theta$.

证明(i)由于 $x\equiv a\equiv y(\theta)$,有 $x\vee y\equiv a\vee a=a(\theta)$,故 $x\vee y\ \varepsilon$

$a\theta$. 同理 $x\wedge y \varepsilon a\theta$.

(ii)任取 $t \varepsilon [x,y]$ 有 $x\leqslant t\leqslant y$. 由 $x\equiv y(\theta)$知道 $t=t\wedge y\equiv t\wedge x=x(\theta)$. 从 $x \varepsilon a\theta$ 知道 $t \varepsilon a\theta$. 】

由于同余关系 θ 保持运算 $\vee$ 和 $\wedge$ (对它们有替换性质),我们可以合理地定义同余类之间的下列运算:

$$a\theta\vee b\theta=(a\vee b)\theta, \quad a\theta\wedge b\theta=(a\wedge b)\theta$$

事实上,如有 $a_1\theta=a\theta, b_1\theta=b\theta$,则 $a_1\equiv a(\theta), b_1\equiv b(\theta)$,从而 $a_1\vee b_1\equiv a\vee b(\theta), a_1\wedge b_1\equiv a\wedge b(\theta)$,即 $(a_1\vee b_1)\theta=(a\vee b)\theta, (a_1\wedge b_1)\theta=(a\wedge b)\theta$ 故上述运算的定义是合理的. 很明显,商集 L/θ 连同这两个运算作成一个格.

定义 5. 格 $L/\theta=(L/\theta;\vee,\wedge)$称为格 L 关于同余关系 θ 的**商格**

定理 6. **格 L_1 是格 L 的同态像**(即存在一个满同态 φ: $L\to L_1, L_1=\varphi(L)$)**的充要条件是有 L 的一个同余关系 θ 使得 $L_1\cong L/\theta$**

证明. 先证必要性. 这时有满同态 $\varphi:L\to L_1$. 用下式定义 L 上一个二元关系 θ_φ:

$$a\equiv b(\theta_\varphi) \Leftrightarrow \varphi(a)=\varphi(b) \qquad (a,b \varepsilon L)$$

θ_φ 显然是一个等价关系. 设有 $a\equiv c(\theta_\varphi), b\equiv d(\theta_\varphi)$按定义有 $\varphi(a)=\varphi(c), \varphi(b)=\varphi(d)$. 由于 φ 是同态,$\varphi(a\vee b)=\varphi(a)\vee\varphi(b)=\varphi(c)\vee\varphi(d)=\varphi(c\vee d)$,从而 $a\vee b\equiv c\vee d(\theta_\varphi)$. 同理可得 $a\wedge b\equiv c\wedge d(\theta_\varphi)$. 故 θ_φ 是一个同余关系. 下面我们证明有 $L_1\cong L/\theta_\varphi$. 为此,我们定义映射 h: $L/\theta_\varphi \to L_1$ 如下:

$$h(a\theta_\varphi)=\varphi(a) \qquad (a \varepsilon L)$$

如有 $a_1 \varepsilon a\theta_\varphi$,则 $a_1\equiv a(\theta_\varphi)$,从而 $\varphi(a_1)=\varphi(a)$,故 h 的定义不依赖于代表元 a 的选择,从而是合理的. 由于 φ 是满的,h 也是满的. 如有 $h(a\theta_\varphi)=h(b\theta_\varphi)$,则 $\varphi(a)=\varphi(b)$,即 $a\equiv$

$b(\theta_\varphi)$,$a\theta_\varphi = b\theta_\varphi$,故 h 还是一个单射. 剩下需要证明的就是 h 为一同态了. 事实上,我们有

$$h(a\theta_\varphi \vee b\theta_\varphi) = h((a \vee b)\theta_\varphi) = \varphi(a \vee b)$$
$$= \varphi(a) \vee \varphi(b) = h(a\theta_\varphi) \vee h(b\theta_\varphi)$$

类似地,有 $h(a\theta_\varphi \wedge b\theta_\varphi) = h(a\theta_\varphi) \wedge h(b\theta_\varphi)$. 故 h 是从 L/θ_φ 到 L_1 的一个同构.

对于充分性,我们考虑所谓自然同态

$$\eta:\ L \to L/\theta,$$

这里对一切 $a \in L$ 有 $\eta(a) = a\theta$. 根据 L/θ 的定义,它是一个满同态. 因此如果有 $L_1 \simeq L/\theta$,则利用 η 可以构造一个 L 到 L_1 的满同态,即 L_1 是 L 的同态像. 】

以上我们看到,格 L 的每一个同余关系 θ 都诱导出一个商格 L/θ,它们本质上就是 L 的全部同态像. 现在我们来指出,格 L 的全部同余关系也构成一个格,而且是一个完备格.

我们用 $C(L)$ 记格 L 的全部同余关系作成的集. 由于 $\theta \in C(L)$ 可以看成 $L \times L$ 的子集,对于集包含关系,$C(L)$ 作成一个偏序集. 设 $\theta, \varphi \in C(L)$,这里 $\theta \leqslant \varphi$ 的意思是 $\theta \subseteq \varphi$,也就是 $(a,b) \in \theta \Rightarrow (a,b) \in \varphi$. 换句话说,

$$\theta \leqslant \varphi \Leftrightarrow a \equiv b(\theta) \Rightarrow a \equiv b(\varphi) \quad (a,b \in L).$$

很明显,ω 和 ι 分别是 $C(L)$ 的最小元和最大元.

定理 7. $C(L)$ 是一个完备格. 这里对于任意子集 $S = \{\theta_\lambda; \lambda \in \Lambda\} \subseteq C(L)$,格运算的定义是: $\pi = \wedge S = \wedge_{\lambda \in \Lambda}\theta_\lambda = \bigcap_{\lambda \in \Lambda}\theta_\lambda$,$\sigma = \vee S = \vee_{\lambda \in \Lambda}\theta_\lambda$ 的含义则是,对一切 $a,b \in L$,

$a \equiv b(\sigma) \Leftrightarrow$ 存在 L 的元序列 $a = c_1, c_2, \cdots, c_n = b$ 和同余关系 $\theta_1, \cdots, \theta_{n-1} \in S$ 使得对一切 $i = 1, \cdots, n-1$ 有 $c_i \equiv c_{i+1}(\theta_i)$ 成立.

证明. 由于对每个 $\lambda \in \Lambda$,都有 $\omega \leqslant \theta_\lambda$,不难验证 $\pi = \wedge S$

ε $C(L)$,并且的确是 S 的下确界(这里不排斥 $S=\Phi$).

我们证明也有 $\sigma \varepsilon C(L)$并且是 $S=\{\theta_\lambda;\lambda \varepsilon \Lambda\}$的上确界. 显然不妨设 $S\neq\Phi$. 先证 σ 是等价关系. 自反性和对称性显然. 对于传递性,设 $a\equiv b(\sigma)$,$b\equiv c(\sigma)$. 按定义有元序列 $a=c_1,c_2,\cdots,c_n=b$ 和 $\theta_1,\cdots,\theta_{n-1}\varepsilon S$ 使对 $i=1,\cdots,n-1$ 有 $c_i\equiv c_{i+1}(\theta_i)$. 又有序列 $b=f_1,\cdots,f_m=c$,和 $\varphi_1,\cdots,\varphi_{m-1}\varepsilon S$ 使 $f_j\equiv f_{j+1}(\varphi_j)$. 很明显,元序列 $a=c_1,\cdots,c_n=b=f_1,\cdots,f_m=c$ 和同余关系 $\theta_1,\cdots,\theta_{n-1};\varphi_1,\cdots,\varphi_{m-1}\varepsilon S$ 说明有 $a\equiv c(\sigma)$,故 σ 是一个等价关系.

现在设已知 $a\equiv b(\sigma)$. 同前有 $a=c_1,c_2,\cdots,c_n=b$ 和 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{n-1}\varepsilon S$ 使得对 $i=1,\cdots,n-1$ 有 $c_i\equiv c_{i+1}(\theta_i)$. 根据定理 2,对任意 $x\varepsilon L$ 都有 $c_i\vee x\equiv c_{i+1}\vee x(\theta_i)$和 $c_i\wedge x\equiv c_{i+1}\wedge x(\theta_i)$. 于是元序列 $a\vee x=c_1\vee x,\cdots,c_n\vee x=b\vee x$ 和 $a\wedge x=c_1\wedge x,\cdots,c_n\wedge x=b\wedge x$ 证明了 $a\vee x\equiv b\vee x(\sigma)$和 $a\wedge x\equiv b\wedge x(\sigma)$. 故 $\sigma \varepsilon C(L)$确是 L 的一个同余关系.

剩下要证的是 $\sigma=\mathrm{Sup}\ S=\mathrm{Sup}\ \{\theta_\lambda;\lambda\varepsilon\Lambda\}$. 首先 σ 是 S 的一个上界,即对一切 $\theta_\lambda\varepsilon S$ 有 $\theta_\lambda\leqslant\sigma$. 事实上设有 $a\equiv b(\theta_\lambda)$,我们只需取 $c_1=a,c_2=b,\theta_1=\theta_\lambda$ 就知道有 $a\equiv b(\sigma)$. 故 $\theta_\lambda\leqslant\sigma$(一切 $\lambda\varepsilon\Lambda$). 现在设 $\Sigma\varepsilon C(L)$是 S 的任一上界,于是对一切 $\lambda\varepsilon\Lambda$ 有 $\theta_\lambda\leqslant\Sigma$. 设有 $a\equiv b(\sigma)$,我们有 $a=c_1,c_2,\cdots,c_n=b,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1}\varepsilon S,c_i\equiv c_{i+1}(\theta_i),i=1,\cdots,n-1$. 但 $\theta_i\leqslant\Sigma$,我们有 $c_i\equiv c_{i+1}(\Sigma)$. 由 Σ 的传递性得到 $a\equiv b(\Sigma)$,即 $\sigma\leqslant\Sigma$,故有 $\sigma=\mathrm{Sup}\ S$. ▮

在定理 7 中,$\sigma=\vee S=\vee_{\lambda\varepsilon\Lambda}\theta_\lambda$ 有一个在某些场合更便于应用的刻划如下.

定理 8. 存在 L 的元序列 $a=c_1,c_2,\cdots,c_n=b,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{n-1}\varepsilon S=\{\theta_\lambda;\ \lambda\varepsilon\Lambda\}$使对一切 $i=1,\cdots,n-1$ 有 $c_i\equiv c_{i+1}(\theta_i)$的充要

条件是存在元序列 $a\vee b=c_1\geqslant c_2\geqslant\cdots\geqslant c_n=a\wedge b$ 和 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{n-1}\in S$ 使 $c_i\equiv c_{i+1}(\theta_i)$ 对一切 $i=1,2,\cdots,n-1$ 成立.

有的作者用我们现在陈述的条件来定义 σ.

证明. 先证必要性. 令

$$c_i=(a\vee b)\wedge(c_i\vee\cdots\vee c_n),$$
$$i=1,2,\cdots,n.$$

我们有 $a\vee b=c_1\geqslant c_2\geqslant\cdots\geqslant c_n=b$. 从 $c_i\equiv c_{i+1}(\theta_i)$立刻知道也有 $c_i\equiv c_{i+1}(\theta_i)$. 再令

$$d_j=(a\wedge b)\vee(c_n\wedge c_{n-1}\wedge\cdots\wedge c_j)$$
$$(j=n,n-1,\cdots,1)$$

有 $b=d_n\geqslant d_{n-1}\geqslant\cdots\geqslant d_1=a\wedge b, d_{j+1}\equiv d_j(\theta_j), j=n-1,\cdots,1$. 于是元序列 $a\vee b=c_1\geqslant\cdots\geqslant c_n=b=d_n\geqslant\cdots\geqslant d_1=a\wedge b$ 和同余关系序列 $\theta_1,\cdots,\theta_{n-1};\theta_{n-1},\cdots,\theta_1\in S$ 证实了条件的必要性.

充分性证明比较简单,留作习题,这里从略. 】

定义 9. 按照定理 7 或 8 定义的运算 $\vee$ 和 $\wedge$, $C(L)=(C(L);\vee,\wedge)$称为 L 的同余关系格(简称同余格).

和理想格一样,同余格也有许多重要性质,我们今后将作一些介绍.

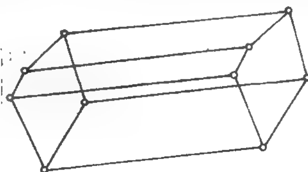


图 8

现在我们引入直积的概念．先考虑有限的情形．

设 $L=(L;\vee,\wedge)$ 和 $K=(K;\vee,\wedge)$ 是两个格，在笛卡尔积 $L\times K=\{(a,b)|a\in L,b\in K\}$ 中可以"按坐标"定义两个运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 如下：

$(a,b)\vee(a_1,b_1)=(a\vee a_1,b\vee b_1)$，$(a,b)\wedge(a_1,b_1)=(a\wedge a_1,b\wedge b_1)$，这里 $(a,b),(a_1,b_1)\in L\times K$．很明显 $L\times K=(L\times K;\vee,\wedge)$ 作成一个格．

定义 10. 格 $L\times K=(L\times K;\vee,\wedge)$ 称为格 L 和 K 的直积．

图 8 是直积 $\mathfrak{N}_5\times C_2$ 的 Hasse 图．

在同构的意义下，直积显然与直积因子的次序无关，就是说，有 $L\times K\cong K\times L$，事实上 $(a,b)\to(b,a)$，$(a,b)\in L\times K$，就是所需要的同构映射．又当 $L\cong L_1$，$K\cong K_1$ 时，显然也有 $L\times K\cong L_1\times K_1$．

对任意有限个格，我们可以类似地定义它们的直积．其实对任意一族格 $\{L_\lambda;\lambda\in\Lambda\}$，我们也可以用同样方法定义直积，只不过在表达上稍微不同一点．这时，格族 $\{L_\lambda;\lambda\in\Lambda\}$ 的笛卡尔集是 $\prod_{\lambda\in\Lambda}L_\lambda=\{f\mid f:\ \Lambda\to\bigcup_{\lambda\in\Lambda}L_\lambda$，对每个 $\lambda\in\Lambda$ 有 $f(\lambda)\in L_\lambda\}$．我们依然"按坐标"来定义格运算，就是说，规定对一切 $f,g\in\prod_{\lambda\in\Lambda}L_\lambda$，一切 $\lambda\in\Lambda$，有

$$(f\vee g)(\lambda)=f(\lambda)\vee g(\lambda),\quad (f\wedge g)(\lambda)=f(\lambda)\wedge g(\lambda).$$

这时得到的格 $\prod_{\lambda\in\Lambda}L_\lambda=(\prod_{\lambda\in\Lambda}L_\lambda;\vee,\wedge)$ 称为格族 $\{L_\lambda;\lambda\in\Lambda\}$ 的直积．

当格族有限时，它化归为前面定义的有限个格的直积．

当对一切 $\lambda\in\Lambda$ 都有 $L(\lambda)=L$ 是同一个格时，我们简记 $\prod_{\lambda\in\Lambda}L_\lambda=\prod_{\lambda\in\Lambda}L$ 为 L^Λ．当格族有限，即集 Λ 有限时，这时我们一般取 $\Lambda=\{1,\cdots n\}$，得到的相应直积是 L^n（代替记号 L^Λ）．

关于直积的同余关系，有以下有趣结果.

定理 11. **设 L,K 是格,θ,φ 分别是它们的同余关系,则如下定义的二元关系 $\theta\times\varphi$:**

$$(a,b)\equiv(a_1,b_1)(\theta\times\varphi)\Leftrightarrow a\equiv a_1(\theta),b\equiv b_1(\varphi)$$

其中$(a,b),(a_1,b_1)\varepsilon L\times K$,是直积 $L\times K$ 的同余关系. 不仅如此,直积 $L\times K$ 的任一同余关系都必然是这种形式.

证明. 定理的前半明显成立.

现在设 ρ 是 $L\times K$ 的同余关系,我们证明必有 L 和 K 的同余关系 θ 和 φ 使得 $\rho=\theta\times\varphi$.

我们利用 ρ 定义 L 的一个二元关系 θ 如下: 对任意 $a,a_1\varepsilon L$,规定

$$a\equiv a_1(\theta)\Leftrightarrow \text{存在 } y\varepsilon K \text{ 使}(a,y)\equiv(a_1,y)(\rho).$$

我们证明,事实上这时对任意 $y_1\varepsilon K$ 也有$(a,y_1)\equiv(a_1,y_1)(\rho)$. 这是因为 ρ 是同余关系,有$(a,y_1)=((a,y)\vee(a\wedge a_1,y_1))\wedge(a\vee a_1,y_1)\equiv((a_1,y)\vee(a\wedge a_1,y_1))\wedge(a\vee a_1,y_1)=(a_1,y_1)(\rho)$. 故我们有 $a\equiv a_1(\theta)\Leftrightarrow$ 对一切 $y\varepsilon K$ 有$(a,y)\equiv(a_1,y)(\rho)$. 同理可定义 K 上一个二元关系 φ 使得当 $b,b_1\varepsilon K$ 时,$b\equiv b_1(\varphi)\Leftrightarrow$ 对一切 $x\varepsilon L$ 都有$(x,b)\equiv(x,b_1)(\rho)$. 不难验证 θ 和 φ 分别是 L 和 K 的同余关系. 我们来证明 $\rho=\theta\times\varphi$.

为此,我们先假定有$(a,b)\equiv(a_1,b_1)(\theta\times\varphi)$. 根据 θ,φ 的上述定义有$(a,y)\equiv(a_1,y)(\rho)$,$(x,b)\equiv(x,b_1)(\rho)$分别对一切 $x\varepsilon K$ 和 $y\varepsilon L$ 成立. 取 $x=a\wedge a_1,y=b\wedge b_1$ 得到$(a,b\wedge b_1)\equiv(a_1,b\wedge b_1)(\rho)$,$(a\wedge a_1,b)\equiv(a\wedge a_1,b_1)(\rho)$,两端分别取并得出$(a,b)\equiv(a_1,b_1)(\rho)$,故有 $\theta\times\varphi\leqslant\rho$. 反过来,如已知$(a,b)\equiv(a_1,b_1)(\rho)$,两端同交元$(a\vee a_1,b\wedge b_1)$得到$(a,b\wedge b_1)\equiv(a_1,b\wedge b_1)(\rho)$即有 $a\equiv a_1(\theta)$.同理有 $b\equiv b_1(\varphi)$. 从而有$(a,a_1)\equiv(b,b_1)(\theta\times\varphi)$. 于是又有 $\rho\leqslant\theta\times\varphi$,从而 $\rho=\theta\times\varphi$. ▮

作为本节的结束,我们来证明关于商格的同余关系的一个重要定理.

定理 12(第二同构定理). 设 $\theta \in C(L)$,又 $\varphi \in C(L)$满足条件 $\varphi \geqslant \theta$. 下式 $(a,b \in L)$

$$a\theta \equiv b\theta(\varphi/\theta) \Leftrightarrow a \equiv b(\varphi)$$

确定的二元关系 φ/θ 是商格 L/θ 的一个同余关系. 反过来, L/θ 的任一同余关系 ρ 都可以唯一地表成 φ/θ 的形式,这里 $\varphi \geqslant \theta$ 是 L 的同余关系. 由此特别知道 $C(L/\theta) \cong [\theta)$,后者是 $C(L)$的一个主滤斗.

证明. 首先易知 φ/θ 的定义是合理的,因为如有 $a_1\theta = a\theta, b_1\theta = b\theta$ 则 $a_1 \equiv a(\theta), b_1 \equiv b(\theta)$,由于 $\theta \leqslant \varphi$ 又已有 $a \equiv b(\varphi)$,我们也有 $a_1 \equiv b_1(\varphi)$即 $a_1\theta \equiv b_1\theta(\varphi/\theta)$,故定义是合理的. φ/θ 为一同余关系显然. 我们来证第二个论断. 为此,设已知 $\rho \in C(L/\theta)$. 用下式定义 L 中一个二元关系 φ:

$$a \equiv b(\varphi) \Leftrightarrow a\theta \equiv b\theta(\rho), \qquad (a,b \in L).$$

关系 φ 显然是 L 的同余关系,并且当 $a \equiv b(\theta)$时有 $a\theta = b\theta$ 当然有 $a\theta \equiv b\theta(\rho)$,即有 $a \equiv b(\varphi)$. 这证明了 $\theta \leqslant \varphi$. 于是按 φ/θ 的定义得到 $\rho = \varphi/\theta$. 这个表达式显然是唯一的.

$C(L/\theta) \cong [\theta)$不难验证,我们留给读者去完成. ▌

§5. 格多项式

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$是一列变元,我们可以像通常那样,利用运算$\vee$和$\wedge$(必要时使用括号)把若干变元组成**格多项式**. 例如 $x_1, x_2 \vee x_3, (x_1 \wedge x_2) \vee x_4, (x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (x_3 \vee x_1), \cdots$都是格多项式. 最多出现 n 个变元$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的多项式称为 **n 元多项式**. 我们用 $P^{(n)}$记全部 n 元多项式作成的集,$P^{(n)}$有以

下更确切的定义:

定义 1. $P^{(n)}$是满足下列条件的最小集:

(i) $x_i \in P^{(n)}, i=1,2,\cdots,n$,

(ii) $p,q \in P^{(n)} \Rightarrow p\vee q, p\wedge q \in P^{(n)}$.

$P^{(n)}$中的元称为 n 元多项式.

对格多项式,引入阶的概念是有益的. 对每个 i, x_i 的阶是 1, $p\vee q$ 和 $p\wedge q$ 的阶都是 p 的阶和 q 的阶之和.

一个 n 元多项式 p 在格 L 上确定一个 n 元函数如下:

(i)如果 $p=x_i$,则 $p(a_1,\cdots,a_n)=a_i, i=1,\cdots,n$,

(ii)如果 $p(a_1,\cdots,a_n)=a, q(a_1,\cdots,a_n)=b$,则当 $s=p\vee q, t=p\wedge q$ 时,有 $s(a_1,\cdots,a_n)=a\vee b, t(a_1,\cdots,a_n)=a\wedge b$,这里 $a_i \in L, i=1,\cdots,n$.

注意当 p 只含一个变元时,对一切 $a\in L$ 有 $p(a)=a$. 只含两个变元时,对一切 $a,b\in L$,只能有 $p(a,b)=a,b,a\vee b$ 或 $a\wedge b$. 因为,在格中两个元最多只能演化出这四个结果(例如 $(a\vee b)\vee b=a\vee b, (a\vee b)\wedge b=b$ 等再得不出新结果了). 现在我们可以用格多项式这个概念来更确切地描述非空集 $S\subseteq L$ 生成的子格 [S] 了.

定理 2. $a\in[S]$ 的充要条件是存在某个正整数 $n\geqslant 1$ 和某个 n 元多项式 p 以及 n 个元 $s_1,\cdots,s_n\in S$ 使得 $a=p(s_1,\cdots,s_n)$. 就是说

$$[S]=\{a\in L \mid a=p(s_1,\cdots,s_n), s_i\in S, p\in P^{(n)}\}$$

其中 n 是正整数, $i=1,\cdots,n$.

证明. 令 $A=\{a\in L \mid a=p(s_1,\cdots,s_n), s_i\in S, p\in P^{(n)}\}$. 其中 n 是正整数又 $i=1,\cdots,n$. 对运算 $\vee$ 和 $\wedge$,A 明显封闭,因而作成 L 的一个子格. 包含 S 的任何子格显然都包含 A,故 $[S]=A$. ▌

定义 3. 所谓格等式(或格不等式)是一个形如 $p=q$(或 $p\leqslant q$)的表达式,p,q 是多项式.

如果对一切 $a_1,\cdots a_n\in L$ 都有 $p(a_1,\cdots,a_n)=q(a_1,\cdots,a_n)$(或 $p(a_1,\cdots,a_n)\leqslant q(a_1,\cdots,a_n)$)成立,我们说,等式 $p=q$(或不等式 $p\leqslant q$)在 L 上成立.

值得注意的是,对格多项式来说,(在谈到它们是否在一个格 L 上成立时)等式与不等式是可以互相表达的. 例如 $p=q$ 可以表述为 $p\leqslant q$ 又 $q\leqslant p$,而 $p\leqslant q$ 则与 $p=p\wedge q$ 和 $q=p\vee q$ 都等价. 因此今后我们一般只讨论格等式,这并不会丧失一般性.

格等式的一个重要性质是:

定理 3. 如果格等式 $p=q$ 在格 L 上成立,则它在 L 的每个子格、每个同态像和 L 的理想格 $I(L)$ 上成立. 如果对每个 $\lambda\in\Lambda$,$p=q$ 都在格 L_λ 上成立,则它也在直积 $\Pi_{\lambda\in\Lambda}L_\lambda$ 上成立.

证明. 子格情形显然.

设 φ: $L\to L_1$ 是一个满同态. 我们先证对一切 $a_1,\cdots,a_n\in L$ 总有等式

$$\varphi(p(a_1,\cdots,a_n))=p(\varphi(a_1),\cdots,\varphi(a_n))$$

成立,这里 p 是任意格多项式. 证明是对 p 的阶进行归纳. 当 $p=x_i$ 即阶为 1 时,有 $p(a_1,\cdots,a_n)=a_i$ 从而 $\varphi(p(a_1,\cdots,a_n))=\varphi(a_i)=p(\varphi(a_1),\cdots,\varphi(a_n))$. 设等式对一切阶数小于 p 的阶的多项式已成立,我们来证它对 p 也成立. 事实上,p 不外两种形式(当它阶大于 1 时),$p=s\vee t$ 或 $p=s\wedge t$. 这里 s,t 是两个阶数小于 p 的阶的多项式. 按归纳假设有 $\varphi(s(a_1,\cdots,a_n))=s(\varphi(a_1),\cdots,\varphi(a_n))$, $\varphi(t(a_1,\cdots,a_n))=t(\varphi(a_1),\cdots$

$,\varphi(a_n))$. 从而当 $p=s\vee t$ 时,我们有

$$\begin{aligned}\varphi(p(a_1,\cdots,a_n)) &= \varphi(s(a_1,\cdots,a_n)\vee t(a_1,\cdots,a_n))\\ &= \varphi(s(a_1,\cdots,a_n))\vee\varphi(t(a_1,\cdots,a_n))\\ &= s(\varphi(a_1),\cdots,\varphi(a_n))\vee t(\varphi(a_1),\cdots,\varphi(a_n))\\ &= p(\varphi(a_1),\cdots,\varphi(a_n)).\end{aligned}$$

$p=s\wedge t$ 时,可同样证明等式成立.

现在设 $p=q$ 在 L 上成立. 由于 $\varphi:L\to L_1$ 是满同态,对 L_1 中任意元 $b_1,\cdots,b_n$ 有 L 中元 $a_1,\cdots,a_n$ 使 $b_i=\varphi(a_i),i=1,\cdots,n$. 由于在 L 中有 $p(a_1,\cdots,a_n)=q(a_1,\cdots,a_n)$, 在 L_1 中得到

$$\begin{aligned}p(b_1,\cdots,b_n) &= p(\varphi(a_1),\cdots,\varphi(a_n)) = \varphi(p(a_1,\cdots,a_n))\\ &= \varphi(q(a_1,\cdots,a_n)) = q(\varphi(a_1),\cdots,\varphi(a_n))\\ &= q(b_1,\cdots,b_n),\end{aligned}$$

这就证明了同态像的情形.

对理想格情形,设有 $I_1,\cdots,I_n\in I(L)$,我们先来证对任意格多项式 p 都有

$$p(I_1,\cdots,I_n)=\{x\in L\mid x\leqslant p(i_1,\cdots,i_n);i_k\in I_k,k=1,\cdots,n\}.$$

我们仍然对 p 的阶进行归纳. $p=x_i$ 时显然成立,即阶为一时等式成立. 设 p 的阶大于 1 又等式对一切阶数小于 p 的阶的多项式均已成立. 设有 $p=s\vee t$,这里 s,t 的阶低于 p 的阶. 根据定理 3.16,我们有

$$\begin{aligned}p(I_1,\cdots,I_n) = s(I_1,\cdots,I_n)\vee t(I_1,\cdots,I_n) = \{x\in L\mid x\\ \leqslant i\vee j,i\in s(I_1,\cdots,I_n),j\in t(I_1,\cdots,I_n)\}\end{aligned}$$

按归纳假定,有 $i_k',i_k''\in I_k,k=1,\cdots,n$ 使得 $i\leqslant s(i_1',\cdots,i_n'),j\leqslant t(i_1'',\cdots,i_n'')$. 令 $i_k=i_k'\vee i_k'',k=1,\cdots,n$,显然有 $i_k\in I_k,k=1,\cdots,n$ 并且 $s(i_1',\cdots,i_n')\leqslant s(i_1,\cdots,i_n),t(i_1'',\cdots,i_n'')\leqslant t(i_1,\cdots,i_n)$,从而 $x\leqslant i\vee j\leqslant s(i_1,$

$\cdots,i_n)\vee t(i_1,\cdots,i_n)=p(i_1,\cdots,i_n)$. 这就证明了

$$p(I_1,\cdots,I_n)\subseteq\{x\in L\mid x\leqslant p(i_1,\cdots,i_n),i_k\in I_k,\ k=1,\cdots,n\}.$$

由于反包含关系显然成立,故等式成立. 当 $p=s\wedge t$ 时,同样可证等式成立.

现在设 $p=q$ 在 L 上成立. 我们有

$$\begin{aligned}P(I_1,\cdots,I_n)&=\{x\in L\mid x\leqslant p(i_1,\cdots,i_n),i_k\in I_k\}\\&=\{x\in L\mid x\leqslant q(i_1,\cdots,i_n),i_k\in I_k\}\\&=q(I_1,\cdots,I_n),\end{aligned}$$

即 $p=q$ 在 $I(L)$上成立.

很明显,结论在 $I_0(L)$上也成立.

直积情形明显成立,证明从略.]

现在我们来考察几个极其重要的格等式(和格不等式),以及由它们确定的格类.

定理 4. 对任意格 L,以下条件等价:

(i) $a\geqslant c\Rightarrow(a\wedge b)\vee c=a\wedge(b\vee c)$,

(ii) $(a\wedge b)\vee(a\wedge c)=a\wedge(b\vee(a\wedge c))$.

证明. (i) $\Rightarrow$ (ii). 由于 $a\geqslant a\wedge c$,从(i)立即得出(ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i). 由于这时 $c=a\wedge c$,从(ii)又立即得出(i).]

定义 5. 满足定理 4 中任一条件(它们等价)的格称为模格.条件(i)或(ii)称为模律. 就是说,满足模律的格是模格.

由于当 $a\geqslant c$ 时,不等式$(a\wedge b)\vee c\leqslant a\wedge(b\vee c)$总成立,我们有

定理 6. 格 L 为一模格的充要条件是对 $a,b,c\in L$,当 $a\geqslant c$ 时有不等式

$$a\wedge(b\vee c)\leqslant(a\wedge b)\vee c$$

成立. 】

这个定理可以看作是模格的不等式定义.

模格是一种常见的格,是本书重点研究对象之一.

定理 7. 对任意格 L,以下条件等价:

(i) $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$,

(ii) $a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$,

(iii) $(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)$

$$=(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)$$

证明.(i) $\Leftrightarrow$ (ii). 由于(i)和(ii)互为对偶,只须证明(i) $\Rightarrow$ (ii)即可. 这可由直接计算得到:

$$\begin{aligned}(a\vee b)\wedge(a\vee c)&=((a\vee b)\wedge a)\vee((a\vee b)\wedge c)\\&=a\vee(a\wedge c)\vee(b\wedge c)=a\vee(b\wedge c)\end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii). 同样直接计算可得

$$\begin{aligned}&(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)\\&\quad=(a\vee b\vee c)\wedge(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)\\&\quad=(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)\end{aligned}$$

(iii) $\Rightarrow$ (i). 在(iii)中. 取 $a\geqslant c$ 得到 $(a\wedge b)\vee c=a\wedge(b\vee c)$,即(iii)成立时有模律成立. 再回到(iii),两端同交一个 a,左端得到 $a\wedge(b\vee c)$,用模律从右端得到

$$\begin{aligned}&a\wedge((a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a))\\&\quad=(a\wedge b)\vee(c\wedge a)\vee(a\wedge b\wedge c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)\end{aligned}$$

这就是(i). 】

定义 8. 满足定理 7 中任一条件(它们等价)的格称为分配格. 条件(i)–(iii)中的每一个都称为分配律. 满足分配律的格是分配格.

从定理 7 的证明,我们已有

定理 9. 分配格是模格. ▌

但反之不然. 容易验证,$\mathfrak{M}_3$ 是模格,但不是分配格. 非模格的最简单的例是$\mathfrak{N}_5$.

由下不等式$(a\wedge b)\vee(a\wedge c)\leqslant a\wedge(b\vee c)$,$a\vee(b\wedge c)\leqslant(a\vee b)\wedge(a\vee c)$和$(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)\leqslant(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)$总成立,我们有分配格的下列不等式定义:

定理 10. 格 L 为一分配格的充要条件是下列条件之一成立:

(i) $a\wedge(b\vee c)\leqslant(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$,

(ii) $(a\vee b)\wedge(a\vee c)\leqslant a\vee(b\wedge c)$,

(iii) $(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)\leqslant(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)$. ▌

分配格与模格都是本书的重点研究对象.

§6. 自由格.

所谓自由格,粗略地说,就是一个除去(L1)–(L4)外不再满足其他任何格等式的格((L1)–(L4)必须满足因为否则就不是格了).

上述概念过于一般,我们通常考虑的是**由一个生成元集生成的自由格**. 不但如此,对生成元集我们还可以提出某些要求. 如下页图 9 所示的就是一个由三元集{x,y,z},其中x>y,生成的自由格.

事实上,由 x>y 我们有以下不等式:

$$y\wedge z\leqslant y\leqslant(x\wedge z)\vee y\leqslant x\wedge(y\vee z)\leqslant x\leqslant x\vee z,$$

$$y\wedge z\leqslant x\wedge z\leqslant z\leqslant y\vee z\leqslant x\vee z,$$

$$x\wedge z\leqslant(x\wedge z)\vee y,\quad x\wedge(y\vee z)\leqslant y\vee z.$$

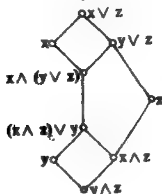


图 9

由于我们考虑的是自由格,上述关系式的≤均不能成立等号. 因为,比如说,如果有 $y\wedge z=y$,则 $y\leqslant z$,而这不可能,因为三元集$\{x,y,z\}$中我们只假定了 $x>y$ 而 y, z 间并无可比关系. 又如有 $y=(x\wedge z)\vee y$,则它也应在图 10 所示的格中成立. 因为这个格中有 $x>y$ 又(L1)—(L4)自然是成立的. 但对于这个格,所说等式显然不成立. 类似可以证明所有的不等式都是严格的不等式. 于是我们得到自由格中 9 个互不相同的元按图 9 中的顺序排列.

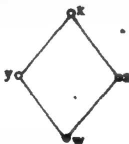


图 10

我们还需证明,所说的自由格中只有这 9 个元. 事实上,根据定理 5.2,自由格的任何元都应是 x,y,z 的三元多项式

$p(x,y,z)$. 不难证实,利用 $x>y$ 和(L1)–(L4)可以把每一个这种多项式都化归为前述 9 个多项式之一. 例如我们有 $x\vee y\vee z=x\vee z$,$(x\wedge y)\vee(x\wedge z)=(x\wedge z)\vee y$ 等. 故所求的自由格就是图 9 所示的那个格.

我们还可以考虑一类格中的自由格,如自由模格,自由分配格等. 这里,前者指的是一个除模律和(L1)–(L4)外不满足任何其它格等式的格,后者自然是在上述语句中把模律换成分配律所产生的格. 下面图 11 和 12 分别是三元无序集 $\{x,y,z\}$ 生成的自由模格和自由分配格的 Hasse 图. 验证这些图的正确性没有原则性的困难,但却非常繁复,这里就从略了.

这里值得提一下的是: 可以证明任意 n 元集生成的自由分配格都是有限格. 但 1933 年 G.Birkhoff 指出,4 元无序集生成的自由模格就已经不再是有限的了.

为了对自由格的概念作确切的描述,我们引入格等式族的有用概念.

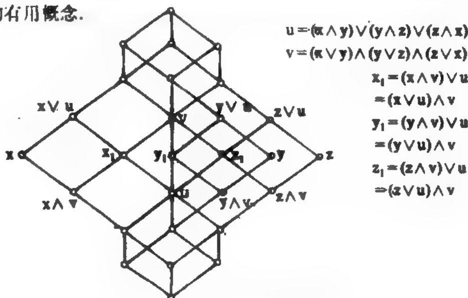
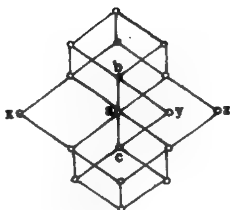


图 11 $\{x,y,z\}$生成的自由模格



$$a=(x\wedge y)\vee(y\wedge z)\vee(z\wedge x)$$
$$=(x\vee y)\wedge(y\vee z)\wedge(z\vee x)$$
$$b=(x\vee y)\wedge(y\vee z)$$
$$c=(x\wedge y)\vee(y\wedge z)$$

图 12 $\{x,y,z\}$生成的自由分配格

定义 1. 设$\{p_\lambda=q_\lambda;\lambda\in\Lambda\}$是一组格等式. 所有满足这一组等式的格作成一个格族,称为由这一组格等式确定的格等式族,简称等式族,通常记作$\mathbb{K}$.

只包含单元格的格族记作$\mathbb{T}$称为平凡族,它显然由满足一切格等式的格作成.

重要的格等式族有全体格作成的族$\mathbb{L}$,刻划它的格等式就是(L1)~(L4),全体分配格作成的族$\mathbb{D}$,刻划它的格等式是(L1)~(L4)再加上分配律,和全体模格作成的族$\mathbb{M}$,相应的格等式是(L1)~(L4)加上模律. 我们有显然的包含关系

$$\mathbb{T}\subseteq\mathbb{D}\subseteq\mathbb{M}\subseteq\mathbb{L}$$

如前所述,自由格的生成元集本身可以有一个偏序. 我们引入以下确切的自由格定义:

定义 2. 设 P 为一偏序集,$\mathbb{K}$是一个等式族. 格 $F_{\mathbb{K}}(P)$称为偏序集 P 在等式族$\mathbb{K}$上生成的自由格,如果

(i) $F_{\mathbb{K}}(P)\in\mathbb{K}$,

(ii) $P\subseteq F_{\mathbb{K}}(P)$,并且对一切 $a,b,c\in P$ 有: 在 P 中

$\operatorname{Sup}\{a,b\}=c$ 当且仅当在 $F_K(P)$中 $a\vee b=c$,又在 P 中 $\operatorname{Inf}\{a,b\}=c$ 当且仅当在 $F_K(P)$中 $a\wedge b=c$.

(iii) $[P]=F_K(P)$,

(iv) 设 $L\varepsilon \mathbb{K}$,又 φ: $P\to L$ 是一个保序映射并满足条件: 对 $a,b,c\ \varepsilon\ P$,(在 P 中)$\operatorname{Sup}\{a,b\}=c$ 时,(在 L 中),有 $\varphi(a)\vee\varphi(b)=\varphi(c)$,又(在 P 中)$\operatorname{Inf}\{a,b\}=c$ 时,(在 L 中)有 $\varphi(a)\wedge\varphi(b)=\varphi(c)$,则 φ 可以扩张成一个格同态 h: $F_K(P)\to L$,即存在这样一个同态 h 使得对一切 $a\ \varepsilon\ P$ 有 $h(a)=\varphi(a)$

偏序集 P 称为自由格 $F_K(P)$的生成元集.

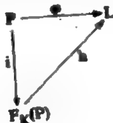


图 13

我们通常用 i: $P\to F_K(P)$记从 P 到 $F_K(P)$的包含映射(即恒等映射 $i(a)=a,a\ \varepsilon\ P$),条件(iv)可表作图 13,图被了解作是交换的,即有 $hi=\varphi$. 很明显这正是条件(iv)的要求: h 扩张 φ.



图 14

当 P 是无序集时,设 P 的基数$|P|=m$,则我们常简记 $F_K(P)$,$|P|=m$,为 $F_K(m)$,称为$\mathbf{K}$上由 m 个生成元生成的自由格. $\mathbf{K}=\mathbf{L}$时,我们通常略去$\mathbf{L}$不写,从而有符号 F(P)和 F(m),它们分别称为由偏序集 P 和由 m 个元生成的自由格. 图 11 所示的是 $F_M(3)$,图 12 是 $F_D(3)$,而图 9 所示则是 F(P),其中 P 是图 14 所示的偏序集.

自由格定义中的条件(i)–(iii)都很自然,条件(iv)所表达的则正是:$F_K(P)$除去满足等式族$\mathbf{K}$的那些等式以及 P 中所有的关系式外不满足任何其它等式和关系式这一至关重要的性质.

不难看出,定义中所说的格同态 h 是唯一的. 事实上,设 $x\in F_K(P)$,根据定理 5.2,有多项式 p 和 P 中元 $a_1,\cdots,a_n$ 使 $x=p(a_1,\cdots,a_n)$. 由于 h 是同态,我们有

$$h(x)=h(p(a_1,\cdots,a_n))=p(h(a_1),\cdots,h(a_n))$$
$$=p(\varphi(a_1),\cdots,\varphi(a_n)).$$

故我们已有

定理 3. 定义 2 中的同态 h 由 φ 唯一确定. ∎

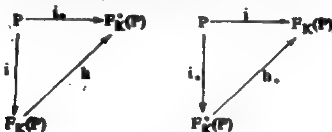


图 15

不仅如此,我们还知道,在同构的意义下,自由格 $F_K(P)$也是唯一的,即我们有

定理 4. 设 $F_K(P)$,$F_K^*(P)$都是偏序集 P 在等式族$\mathbf{K}$上生

成的自由格,则必有 $F_K(P)\simeq F_K^*(P)$.

证明.考虑图 15,由于 $F_K(P)$,$F_K^*(P)$都是 P 生成的自由格,图中同态 h,h_*存在并有 $hi=i_*$,$h_*i_*=i$(在 P 上),这里 i_*: $P\to F_K^*(P)$是包含映射. 于是 h_*h: $F_K(P)\to F_K(P)$是同态映射并在生成元集 P 上是恒等映射,由定理 3 的证明可知,它在整个 $F_K(P)$上都是恒等映射. 同理 hh_*: $F_K^*(P)\to F_K^*(P)$也是恒等同态. 于是 h 和 h_*都是同构映射. 】

定理 4 说明,当 $F_K(P)$存在时,它在同构的意义下是唯一的. 但在什么情况下有自由格 $F_K(p)$存在呢?并非在任何情况下都有这种自由格存在的. 例如取 $P=\mathfrak{N}_5$,则当$\mathbf{K}=\mathbf{D}$或$\mathbf{M}$时,都不可能有 $F_K(\mathfrak{N}_5)$存在. 因为$\mathfrak{N}_5$是格,如果 $F_K(\mathfrak{N}_5)$是它在$\mathbf{K}$中生成的格,$F_K(\mathfrak{N}_5)=[\mathfrak{N}_5]=\mathfrak{N}_5$,但$\mathfrak{N}_5$既不是模格,更不是分配格,故 $F_M(\mathfrak{N}_5)$,$F_D(\mathfrak{N}_5)$都不可能存在.

F_K存在必需满足某种条件,一个明显的必要条件是

(F) 在$\mathbf{K}$中存在一个格 L 使得 $P\subseteq L$ 并对一切 $a,b,c\in P$ 有:(在 P 中)$\mathrm{Sup}\{a,b\}=c$ 当且仅当(在 L 中)$a\vee b=c$,又(在 P 中)$\mathrm{Inf}\{a,b\}=c$ 当且仅当(在 L 中)$a\wedge b=c$.

事实上,按自由格定义(i),(ii),$F_K(P)$就是这样一个 L. 问题是,这个条件其实还是充分的,即我们有

定理 5. 设 P 为一偏序集,$\mathbf{K}$是一个格等式族. 自由格 $F_K(P)$存在的充分必要条件是条件(F)成立.

证明. 条件的必要性已如前述.

现在设条件(F)成立. 考虑$\mathbf{K}$的子族$\mathbf{K}_1=\{L\in\mathbf{K}\mid$存在保序映射 $\varphi:P\to L$ 使得对一切 $a,b,c\in P$,(在 P 中有)$\mathrm{Sup}\{a,b\}=c$ 时(在 L 中)有 $\varphi(a)\vee\varphi(b)=\varphi(c)$,(在 P 中有)$\mathrm{Inf}\{a,b\}=c$ 时(在 L 中)有 $\varphi(a)\wedge\varphi(b)=\varphi(c)\}$. 由于 F 成立,$\mathbf{K}_1\neq\Phi$.

我们考虑由 P 的元素构成的格多项式作成的集 W(P). 我们在 W(P)上定义一个二元关系 Λ 如下:

当 $p,q \in W(P)$ 时,

$$p \equiv q(\Lambda) \Leftrightarrow \text{对每个 } L \in \mathbb{K}_1, p = q \text{ 在 } L \text{ 上成立.}$$

上述最后断语的意思是:当 $p = p(a_1,\cdots,a_n), q = q(b_1,\cdots,b_m)$时 $(a_i,b_j \in P, i=1,\cdots,n, j=1,\cdots,m)$,对$\mathbb{K}_1$ 定义中的一切保序映射 φ 都有

$$p(\varphi(a_1),\cdots,\varphi(a_n)) = q(\varphi(b_1),\cdots,\varphi(b_m)).$$

很明显,Λ 是 W(P)上的一个等价关系. 我们来使商集

$$W(P)/\Lambda = \{p\Lambda \mid p \in W(P)\}$$

作成一个$\mathbb{K}$中的格.

为此我们注意到,当 $p = p(a_1,\cdots,a_n), q = q(b_1,\cdots,b_m)$时总有 $p \vee q = (p \vee q)(a_1,\cdots,a_n;b_1,\cdots,b_m) = p(a_1,\cdots,a_n) \vee q(b_1,\cdots,b_m)$;

$p \wedge q = (p \wedge q)(a_1,\cdots,a_n;b_1,\cdots,b_m) = p(a_1,\cdots,a_n) \wedge q(b_1,\cdots,b_m)$. 由此不难知道当 $p \equiv q(\Lambda), r \equiv s(\Lambda)$时总有 $p \vee r \equiv q \vee s(\Lambda), p \wedge r \equiv q \wedge s(\Lambda)$. 于是我们可以在 W(p)/Λ 上规定下列二元运算:

$$p\Lambda \vee q\Lambda = (p \vee q)\Lambda, p\Lambda \wedge q\Lambda = (p \wedge q)\Lambda.$$

不难验证 W(P)/Λ 成为一个格,并且属于$\mathbb{K}$. 我们来证, W(P)/Λ 就是我们所要的自由格 $F_{\mathbb{K}}(P)$.

(i) $W(P)/\Lambda \in \mathbb{K}$ 已知.

(ii) 当 $a,b \in P$ 又 $a\Lambda = b\Lambda$ 时,对一切 $L \in \mathbb{K}_1$ 以及一切符合条件的 φ 都应有 $\varphi(a) = \varphi(b)$. 取 L 是条件(F)中的那个 L. 这时 $\varphi = i$ 是包含映射. 我们得到 $a = i(a) = i(b) = b$. 换句话说,$a \to a\Lambda$ $(a \in P)$ 是从 P 到 W(P)/Λ 的一个保序的单射. 因此我们可以把 a 和 aΛ 等同起来,而这就是定义中

的条件(ii).

(iii) 对任意 $p \varepsilon W(P), p=p(a_1,\cdots a_n), a_i \varepsilon P, i=1,\cdots,n$. 很明显有 $p\Lambda = p(a_1\Lambda,\cdots,a_n\Lambda)$,故有$[P]=W(p)/\Lambda$,即条件(iii)也成立.

剩下要证的就是(iv)的成立了. 为此,设 $L \varepsilon \mathbf{K}, \varphi: P \to L$ 是一个保序映射满足条件: 在 P 中有 $\mathrm{Sup}\{a,b\}=c$ 时在 L 中有 $\varphi(a)\vee\varphi(b)=\varphi(c)$;在 P 中 $\mathrm{Inf}\{a,b\}=c$ 时在 L 中有 $\varphi(a)\wedge\varphi(b)=\varphi(c)$. 我们来证明 φ 可以扩张成为一个格同态 $h: W(P)/\Lambda \to L$.

任取元 $p\Lambda \varepsilon W(P)/\Lambda, p=p(a_1,\cdots,a_n), a_i \varepsilon p, i=1\cdots,n$. 我们定义 $W(P)/\Lambda \to L$ 如下:

$$h(p\Lambda)=p(\varphi(a_1),\cdots,\varphi(a_n)).$$

设有 $q=q(b_1,\cdots b_m) \varepsilon W(P), b_j \varepsilon P, j=1,\cdots,m$ 使 $q\Lambda=p\Lambda$,则 $p \equiv q(\Lambda)$. 由于 $L \varepsilon \mathbf{K}_1$,按定义我们有

$$h(q\Lambda)=q(\varphi(b_1),\cdots,\varphi(b_m))=p(\varphi(a_1),\cdots,\varphi(a_n))=h(p\Lambda),$$

这说明 h 的定义是合理的. 当 $p=a \varepsilon P$ 时,$h(a)=h(a\Lambda)=\varphi(a)$,故 h 确是 φ 的一个扩张. h 显然还是一个格同态. 于是(iv)也成立,定理于是全部证完. ▌

定理 6. **对任意非平凡格等式族$\mathbf{K}$和任意基数 m,自由格 $F_{\mathbf{K}}(m)$总存在.**

证明. 只需证明有格 $L \varepsilon \mathbf{K}$ 和子集 $P \subseteq L$,使$|P|=m$,并且,任意 $a,b \varepsilon P$ 在 L 中均不可比.

由于格等式族$\mathbf{K}$非平凡,有格 $K \varepsilon \mathbf{K}, |K|>1$. 于是 K 含有子格 C_2. 记 $C_2=\{0,1\}$. 任取一个集 A 使$|A|=m$. 根据定理 5.3,格 $L=C_2^A \varepsilon \mathbf{K}$. 考虑 L 中的元 $f_\lambda, \lambda \varepsilon A$,这里 $f_\lambda(\lambda)=1, f_\lambda(\mu)=0, \mu\neq\lambda, \mu \varepsilon A$. 于是 $P=\{f_\lambda; \lambda \varepsilon A\} \subseteq L$ 是 L 的一个无序子集. 并且有$|P|=m$. ▌

定理 7. 对任意偏序集 P, $F(P)=F_L(P)$存在.

证明. 设 P 为一偏序集,我们定义它的子集 I 为一"理想",如果对一切 $a,b\in I$,只要 $\mathrm{Sup}\{a,b\}$存在,它就属于 I,并且当 $a\in I$ 又 $x\in P, x\leqslant a$ 时,则也有 $x\in I$. 记 P 的全部理想作成的集为 $I_0(P)$. 很明显,在包含关系导出的偏序下,$I_0(P)$是一个格. 考虑"主理想"$(a]=\{x\in P \mid x\leqslant a\}, a\in P$,它们是 $I_0(P)$的成元. 我们来考虑映射 $\varphi: P\to I_0(P)$,这里 $\varphi(a)=(a]$. 很明显,φ 是一个保序映射.

现在设 $a,b\in P$ 有 $\mathrm{Sup}\{a,b\}=c$ 存在. $(a]\vee(b]\leqslant(c]$显然成立. 如果有 $(a],(b]\subseteq I\in I_0(P)$,则 $a,b\in I$. 于是 $c=\mathrm{Sup}\{a,b\}\in I$,从而$(c]\subseteq I$. 就是说$(a]\vee(b]=(c]$,也就是 $\varphi(a)\vee\varphi(b)=\varphi(c)$. 类似地可证当 $\mathrm{Inf}\{a,b\}=c$ 存在时有 $\varphi(a)\wedge\varphi(b)=\varphi(c)$. 这证明了格 $L=I_0(P)$满足条件(F),根据定理 5, $F(P)=F_L(P)$存在. 】

作为自由格概念的一个运用,我们证明下列有用的定理.

定理 8. 设 L 是模格, $x,y,z\in L$. 如果有等式 $x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z)$或 $x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$成立,则三元无序集$\{x,y,z\}$在 L 中生成一个分配子格.

证明. 三元无序集$\{x,y,z\}$生成的最一般的模格是图 11 中的自由模格. 当 x,y,z 满足条件 $x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z)$时,在图 11 上相当于有关系 $x\vee u=x\vee v$. 由此我们立刻得到 $x_1=(x\vee u)\wedge v=(x\vee v)\wedge v$. 从而易证有 $x_1=y_1=z_1=u=v$. 于是在$\{x,y,z\}$生成的子格中菱形消失了. 故生成子格是一个分配子格.

对于等式 $x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$成立的情形,可同样得证. 】

第一章习题

1. 证明在偏序集中,元 $a_1,\cdots,a_n$ 如有 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant a_1$,则 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

2. 四元偏序集有多少种不同类型? 画出它们的 Hasse 图.

3. 在偏序集 $P=(P,\leqslant)$上定义一个居间关系,它是一个三元关系. 当 $a,b,x \in P$ 时,我们说 x 居于 a,b 之间,记作 $f(axb)$,如果 $a \leqslant x \leqslant b$ 或 $b \leqslant x \leqslant a$. 证明:

(i) $f(axb) \Rightarrow f(bxa)$,

(ii) $f(axb), f(abx) \Rightarrow x=b$,

(iii) $f(axb), f(ayx) \Rightarrow f(ayb)$,

(iv) $f(axb), f(xby), x \neq b \Rightarrow f(aby)$,

(v) $f(abc), f(acd) \Rightarrow f(bcd)$.

4. 满足(P1)和(P3)的序关系 ρ 称为拟序.如果 $P=(P, \leqslant)$ 是一个拟序集,我们在 P 上定义一个二元关系～如下:

$$x \sim y \Leftrightarrow x\rho y \text{ 并且 } y\rho x, \quad (x,y \in P).$$

证明: (i)～是一个等价关系,

(ii)把等价的元等同起来,则 ρ 成为一个偏序.

5. 考虑半直线 $0 \leqslant x \leqslant \infty$上的实函数集 $F(0,\infty)$. $f,g \in F(0,\infty)$时,$f=0(g) \Leftrightarrow$ 有常数 K 和 N 存在使当 $x>N$ 时,有 $f(x) \leqslant Kg(x)$. 证明这样得到 $F(0,\infty)$上的一个拟序.

6. 设 ρ 是集 X 上一个二元关系,在 X 上定义二元关系 σ 如下:

$x\sigma y \Leftrightarrow$ 存在元序列$x=a_1,\cdots,a_n=y$使得对一切$i=1,\cdots,n-1$有$a_i\rho a_{i+1}$,

这里 $x,y,a_i \in X, i=1,\cdots n$. 证明关系 σ 有传递性.

7. 证明在格的定义的四个条件中,(L1)可以从其余条件推出,因而是多余的.

8. 证明在偏序集 P 中,如果对 $a,b,c \in P$,$b \vee c$,$a \vee (b \vee c)$ 和 $a \vee b$ 都存在(这里按定义 $x \vee y = \mathrm{Sup}\{x,y\}$),则$(a \vee b) \vee c$ 也存在,并有$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$.

9. 偏序集 $P=(P,\leqslant)$称为是满足升链条件的,如果 P 中任何上升序列 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots$. 都在有限处终止,即存在正整数 m 使得 $a_m = a_{m+1} = \cdots$. 证明当 P 满足升链条件时, 对每个元 $a \in P$,都有 P 中的一个极大元 g 使得 $a \leqslant g$.

10. 问图 16 所示两个 Hasse 图所示的偏序集是否是格?

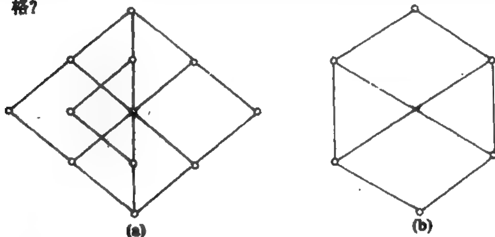


图 16

11. 设 $X=\{a,b\}$是一个二元集. 令 $P=(P,\leqslant)$是 X 的全部二元关系作成的偏序集(以集包含关系为序),试作出 P 的 Hasse 图.对三元集 $X=\{a,b,c\}$作同样的事.

12. 作全部六元格的 Hasse 图.

13. 在格 $L=(L;\vee,\wedge)$中定义三元关系 φ 如下: 对 $a,x,b \in L$,

$$\varphi(axb) \Leftrightarrow a\wedge b\leqslant x\leqslant a\vee b.$$

证明习题 3 中的居间关系 Γ 的许多性质对 φ 也成立,但性质(ii)不行.

14. 设 G 为一群,对任意子集 $S\subseteq G$ 用[S]记 S 生成的子群. 证明映射 $S\to[S]$是 G 的子集格到 G 的子群格的一个满的并同态.

15. 证明有限链 C 的同余关系与把 C 分成若干区间的分划成一一对应.

16. 证明$\mathfrak{M}_3$是单格,但$\mathfrak{N}_5$不是.求出$\mathfrak{N}_5$的同余关系格.

17. 证明对格 L 的任意元 a,b,映射 $f\colon L\to[a\wedge b,a\vee b]$,$f(x)=((a\wedge b)\vee x)\wedge(a\vee b)$,是一个满的保序映射,它有不动点(有 $x\in L$,$f(x)=x$) 并且是幂等的,即有 $f^2=f$.

18. 证明当 $n>6$ 时,任意 n 元格都含有一个恰好由 6 个元作成的子格.

19. 证明对于作为(2,2)型代数的格来说,双射同态是同构.

20. 证明格 L 的任意非空子集都是子格的充要条件是 L 为一链.

21. 证明对有限格 L 有 $I(L)\simeq L$. 问有限这个限制词能否取消?

22. 设 φ: $L\to K$ 是格 L 到格 K 的一个同态. 证明(i)对任意 $I\in I(L)$有 $\varphi(I)\in I(K)$;(ii)对任意 $J\in I(K)$有 $\varphi^{-1}(J)\in I(L)$;(iii)问对于素理想,(i)、(ii)是否还成立?

23. 证明如果 K 是 L 的子格,则 K 同构于 $I(L)$的一个子格.

24. 证明如果$\mathfrak{N}_5$与 $I(L)$的一个子格同构,则它也必与 L 的一个子格同构.

25. 构造一个格使它有一个凸子集不是任何同余关系的一个完整的同余类.

26. 作四元链 C_4 的同余关系格的 Hasse 图.

27. 确定图 9 所示的格的同余关系格.

28. 试举出 $\mathcal{C}(L) \cong L$ 的格 L 的例.

29. 证明 $I(L)$是条件完备的. 即它的任何有上界的非空子集 S 都有上确界$\vee S = \mathrm{Sup}\ S$存在.

30. 证明格 L 的每个真理想都是素理想的充要条件是 L 为一链.

31. 设 φ：$L \to K$ 是格 L 到格 K 的满同态. 如果 K 有最小元 0,则理想 $\varphi^{-1}(0)$称为同态 φ 的核理想

给出一个格和它的一个理想 I,使得 I 不可能是任何同态的核理想.

32. n 元多项式 $p(x_1,\cdots,x_n)$称为在格 L 上是真正 n 元的,如果多项式中出现的变元(对 L 来说)没有多余的. 例如在任意格上多项式 $P(x,y) = x \vee (x \wedge y)$不是真正二元的,因为实际上 $P(x,y) = x$. 证明真正的三元多项式在分配格上有 9 个,在模格上有 19 个.

33. 设$\{\mathbb{K}_\lambda;\lambda \in \Lambda\}$是一族格等式类,证明$\mathbb{K} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda}\mathbb{K}_\lambda$仍是一个格等式类.

34. 设 $P = \{0,a,b\}$,$\mathrm{Inf}\{a,b\} = 0$. 证明对任意非平凡等式族$\mathbb{K}$,有 $F_{\mathbb{K}}(P) \cong F(2)$.

35. 举出一个同构 φ：$F_{\mathbb{K}}(P) \to F_{\mathbb{K}}(P)$的例,使得在 P 上 φ 不是恒等映射.

36. 设 p 为一偏序集,$\mathbb{K}$,$\mathbb{N}$是两个格等示式类,又已知自由格 $F_{\mathbb{K}}(P)$, $F_{\mathbb{N}}(P)$都存在. 证明:当$\mathbb{K} \supseteq \mathbb{N}$时,存在满同态 φ:$F_{\mathbb{K}}(P) \to F_{\mathbb{N}}(P)$使得在 P 上 φ 是恒等映射.

37. 设 $P=\{a,b,c\}, a<b$,确定 $F(P), F_M(P)$和 $F_D(P)$.

38. 对于平凡等式族$\mathbb{T}$,证明 $f_{\mathbb{T}}(P)$存在的充要条件是 $|P|=1$.

第二章　模格

§1. 基本性质

先叙述两个有用的关于模格的判定条件.

定理 1. **格 L 是模格的充要条件是它不含任何五边形 $\mathfrak{N}_5$(作为子格).**

证明. 必要性是明显的,因为根据定理 I.5.3,模格的子格还是模格,但 $\mathfrak{N}_5$ 是非模的.

对充分性我们用反证法. 设定理的条件成立,但 L 不是模格. 于是 L 中有三个元 a,b,c 使 $a>c$ 但 $(a\wedge b)\vee c<a\wedge(b\vee c)$. 令 $x=a\wedge(b\vee c)$,$y=(a\wedge b)\vee c$,$z=b$,我们有 $x>y$,$x\neq z$,$y\neq z$. 事实上,如有 $x=z$,则 $b\leqslant a$,从而 $b\vee c\leqslant a$,$(a\wedge b)\vee c=b\vee c=a\wedge(b\vee c)$而这是不可能的. 同样可证 $y\neq z$. 由于 $x\vee z=y\vee z=b\vee c$,$x\wedge z=y\wedge z=a\wedge b$,$\{x,y,z,a\wedge b,b\vee c\}$ 作成 L 中一个五边形,这与假设相矛盾,故 L 是模格. ▮

定理 2. **格 L 是模格的充要条件是对 L 中任意三元 a,b,c,当 $a\geqslant b$ 时总有**

$$a\vee c=b\vee c,a\wedge c=b\wedge c\ \Rightarrow\ a=b.$$

证明. 如果 L 不是模格,根据定理 1,它含一个五边形 $\{a,b,c,u,v\}$,其中 $a>b$ 但 $a\vee c=b\vee c=v$,$a\wedge c=b\wedge c=u$,从而定理的条件不成立,故条件是充分的.

反过来,如果 L 是模格,则直接计算得到:

$a=a\wedge(a\vee c)=a\wedge(b\vee c)$

$$=(a\wedge c)\vee b=(b\wedge c)\vee b=b. \quad \rbrack$$

模律还有以下等价形式.

定理 3. 格 L 是模格的充要条件是对任意 $a,b,c\in L$ 都有

$$a\wedge(b\vee c)=a\wedge((b\wedge(a\vee c))\vee c).$$

证明. 当 L 为模格时,由于 $a\vee c\geqslant c$,我们有

$$a\wedge(b\wedge(a\vee c)\vee c)=a\wedge(a\vee c)\wedge(b\vee c)$$
$$=a\wedge(b\vee c)$$

故条件必要.

反过来,如果 L 不是模格,它有五边形子格 $N_5=\{a,b,c,u,v\}$,其中 $a>b$. 于是有:

$$a\wedge(c\vee b)=a\wedge v=a,$$
$$a\wedge((c\wedge(a\vee b)\vee b)=a\wedge((c\wedge a)\vee b)$$
$$=a\wedge(u\vee b)=a\wedge b=b,$$

定理的条件不成立,故条件是充分的. 】

以下推论将是有用的

推论 4. 设 L 是模格,$a,b,c\in L$,则

$$(a\vee b)\wedge c=0 \Rightarrow a\wedge(b\vee c)=a\wedge b$$

(本定理的结论被有的作者称为消去律).

证明: 直接计算即可得到

$$a\wedge(b\vee c)=a\wedge(a\vee b)\wedge(b\vee c)=a\wedge(b\vee((a\vee b)\wedge c))$$
$$=a\wedge b. \quad \rbrack$$

模格的一个基本性质是:

定理 5(同构定理). 设 L 是模格, 则对任意 $a,b\in L$, 总有

$$[a,a\vee b]\cong[a\wedge b,b].$$

证明. 定义两个映射如下:

$$\varphi: [a,a\vee b]\to[a\wedge b,b],\ \varphi(x)=x\wedge b.$$

$$\psi: [a\wedge b,b]\to[a,a\vee b],\ \psi(y)=y\vee a.$$

对任意 $x\in[a,a\vee b]$,有

$$\psi\varphi(x)=\psi(x\wedge b)=(x\wedge b)\vee a=x\wedge(b\vee a)=x,$$

对任意 $y\in[a\wedge b,b]$,又有

$$\varphi\psi(y)=\varphi(y\vee a)=(y\vee a)\wedge b=y\vee(a\wedge b)=y,$$

由此知 φ 和 ψ 都是单射,剩下只要证明它们中有一个保序就行了. 任取 $x_1,x_2\in[a,a\vee b]$,有 $\varphi(x_1)=x_1\wedge b\leqslant x_2\wedge b=\varphi(x_2)$. ▌

由于定理 5,在模格中,当$[a,a\vee b]$和$[a\wedge b,b]$中有一个是素区间时,另一个也必然是素区间,故我们有

推论 6. **在模格 L 中,对任意** $a,b\in L$ **有**

$$a\prec a\vee b \Leftrightarrow a\wedge b\prec b.$$

▌



图 17

应该注意,同构定理 5 的逆定理是不成立的. 我们把实数集按普通大小顺序作成的无穷链暂记作 C_∞. 取 A,B 使 $A\cong C_\infty\cong B$,但 $A\cap B=\Phi$. 在 $L=A\cup B\cup\{\infty,-\infty\}$中引入下

列偏序. 对一切 $x \in A \cup B$,规定 $-\infty < x < \infty$;当 x,y 同属 A 或同属 B 时;x,y 保持原在 A 或 B 中的顺序;A 中任何元与 B 中任何元均不可比.(见图 17) 这样 L 作成一格并显然不是模格,但对任意 $a,b \in L$,$[a,a \vee b] \cong [a \wedge b,b]$ 总成立. 这个例说明同构定理的逆不成立. 但在附加条件下,有以下结果.

定理 7. 设 L 为一格. 如果对一切 $a,b \in L$,区间 $[a,a \vee b]$ 和 $[a \wedge b,b]$ 都在互逆映射

φ: $[a,a \vee b] \to [a \wedge b,b]$, $\varphi(x) = x \wedge b$ 和

ψ: $[a \wedge b,b] \to [a,a \vee b]$, $\psi(y) = y \vee a$

下同构,则 L 是模格.

证明. 设 $c \geqslant a$,则 $c \wedge (a \vee b) \in [a,a \vee b]$,我们有:

$c \wedge (a \vee b) = \psi\varphi(c \wedge (a \vee b)) = \psi(c \wedge b) = (c \wedge b) \vee a$,

这正是模律所要求的. 】

作为同构定理的应用,我们来证明重要的 Kurosh-Orc 定理. 先引进几个定义.

定义 8. $a \in L$ 称为格 L 的一个**并既约元**,如果

$$a = x \vee y \;\Rightarrow\; x = a \text{ 或 } y = a \qquad (x,y \in L).$$

对偶地,a 称为**交既约元**,如果

$$a = x \wedge y \;\Rightarrow\; x = a \text{ 或 } y = a \qquad (x,y \in L).$$

定义 9. $a \in L$,如果 $a = a_1 \vee \cdots \vee a_n$,这里 $a_1,\cdots,a_n$ 都是格 L 的并既约元,我们说 a 有了一个**并既约元分解**. 如果表达式中任何一个 a_i 都不能去掉,则我们说分解是**无赘的**. 这时对一切 $i,1 \leqslant i \leqslant n$,都有

$$a > \hat{a}_i = a_1 \vee \cdots \vee a_{i-1} \vee a_{i+1} \vee \cdots \vee a_n.$$

对偶地,可以定义**交既约元分解**和**无赘的交既约元分解**.

定理 10 (Kurosh-Orc). 设 L 为一模格,$a \in L$. 如果 $a = a_1 \vee \cdots \vee a_n = b_1 \vee \cdots \vee b_m$ 是元 a 的两个并既约元分解,则

对每个 a_i, $1\leqslant i\leqslant n$,都有 b_j, $1\leqslant j\leqslant m$,使得

$$a=a_1\vee\cdots\vee a_{i-1}\vee b_j\vee a_{i+1}\vee\cdots\vee a_n=\hat{a}_i\vee b_j$$

成立. 当分解无赘时,还有 $m=n$.

证明. 由于 $a=b_1\vee\cdots\vee b_m$, $\hat{a}_i\leqslant a$, 我们有

$$a=(\hat{a}_i\vee b_1)\vee\cdots\vee(\hat{a}_i\vee b_m)$$

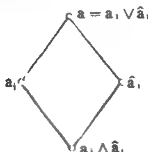


图18

其中对一切 $j=1,\cdots,m$, $\hat{a}_i\vee b_j\in[\hat{a}_i,a]$, 由于 $a_i\vee\hat{a}_i=a$ (图 18), 由同构定理 5, 有 $[\hat{a}_i,a]\cong[a_i\wedge\hat{a}_i,a_i]$, 在这个同构关系中,元 a 对应于元 a_i. 由于 a_i 是并既约元,自然也是区间 $[a_i\wedge\hat{a}_i,a_i]$ 上的并既约元,从而由于同构, a 是 $[\hat{a}_i,a]$ 上的并既约元. 于是由上述分解式知道: 必有 j: $1\leqslant j\leqslant m$, 使得 $a=\hat{a}_i\vee b_j$ 成立,即定理的第一结论成立.

现在考虑第二论断. 利用已证明的结果,先取 $i=1$, 有 j_1:$1\leqslant j_1\leqslant m$, 使 $a=b_{j_1}\vee a_2\vee\cdots\vee a_n=b_1\vee\cdots\vee b_m$. 对这个等式再用已知结果,对 $i=2$ 又有 j_2: $1\leqslant j_2\leqslant m$, 使得 $a=b_{j_1}\vee b_{j_2}\vee a_3\vee\cdots\vee a_n=b_1\vee\cdots\vee b_m$. 这样重复 n 次得到:

$$a=b_{j_1}\vee b_{j_2}\vee\cdots\vee b_{j_n}=b_1\vee\cdots\vee b_m$$

由于 $a=b_1\vee\cdots\vee b_m$ 是无赘的,作为指标集应有 $\{j_1,\cdots,j_n\}=\{1,\cdots,m\}$, 故有 $m\leqslant n$. 同样由 $a=a_1\vee\cdots\vee a_n$ 是无赘

分解，又有 $n \leqslant m$. 于是当两个分解均无赘时，我们得到 $m = n$. ∎

定义 11. 区间$[a,b]$,$[c,d]$称为是**相似的**,如果有 $a \vee d = b, a \wedge d = c$(图 19(a)),或 $b \vee c = d, b \wedge c = a$(图 19(b)).

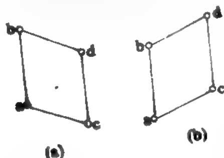


图 19

符号是$[a,b] \searrow [c,d]$或$[a,b] \nearrow [c,d]$.

我们说区间$[a,b]$和$[c,d]$**互相是射影的**,如果存在一串区间

$$[a,b] = [x_1,y_1],[x_2,y_2],\cdots,[x_n,y_n] = [c,d]$$

使得对每个 $i = 1,\cdots,n-1$,区间$[x_i,y_i]$和$[x_{i+1},y_{i+1}]$相似.

根据同构定理,在模格中,相似区间同构,互相射影的区间也同构.

下述定理在群论中是众所周知的.

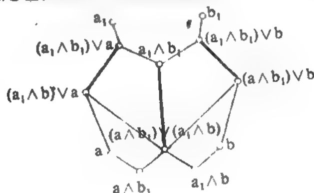


图 20

定理 12 (Zassenhaus 的蝴蝶). 设 L 是模格, $a,a_1,b,b_1 \in L$ 满足条件 $a \leqslant a_1, b \leqslant b_1$,则我们有

$$[(a_1 \wedge b) \vee a, (a_1 \wedge b_1) \vee a] \cong [(a \wedge b_1) \vee b, (a_1 \wedge b_1) \vee b].$$

事实上,通过中间区间 $[(a \wedge b_1) \vee (a_1 \wedge b), a_1 \wedge b_1]$,上述两个区间是相互射影的(上页图 20).

证明. 利用模律,根据条件 $a \leqslant a_1, b \leqslant b_1$ 直接进行计算. 令 $x = (a_1 \wedge b) \vee a, y = a_1 \wedge b_1$,我们有:

$$x \vee y = (a_1 \wedge b) \vee a \vee (a_1 \wedge b_1) = (a_1 \wedge b_1) \vee a,$$

$$x \wedge y = ((a_1 \wedge b) \vee a) \wedge (a_1 \wedge b_1) = (a_1 \wedge b) \vee (a \wedge b_1)$$

就是说有

$$[(a_1 \wedge b) \vee a, (a_1 \wedge b_1) \vee a] \searrow [(a_1 \wedge b) \vee (a \wedge b_1), a_1 \wedge b_1]$$

同样可证

$$[(a_1 \wedge b) \vee (a \wedge b_1), a_1 \wedge b_1] \nearrow [(a \wedge b_1) \vee b, (a_1 \wedge b_1) \vee b].$$ ▌

下面我们讨论有关有限链的几个问题.

定义 13. 格 L 中有限链 $a = x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n = b$ 称为另一有限链 $a = y_1 \leqslant y_2 \leqslant \cdots \leqslant y_m = b$ 的一个加细,如果每个 $y_j (j = 1, \cdots, m)$ 都是某个 $x_i (i = 1, \cdots, n)$.

连接 a,b 的两个链 $a = x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n = b$ 和 $a = y_1 \leqslant y_2 \leqslant \cdots \leqslant y_m = b$ 称为是等价的,如果区间族 $\{[x_i, x_{i+1}]; i = ,\cdots, n-1\}$ 与 $\{[y_j, y_{j+1}]; j = 1, \cdots, m\}$ 之间存在着某种一对一的对应关系(这时自然有 $m = n$),使得对应的区间相互都是射影的.

有限链 $a = x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n = b$ 称为一个极大链,如果对每个 $i = 1, \cdots, n-1$,都有 $x_i \prec x_{i+1}$ ($[x_i, x_{i+1}]$ 是素区间). 很明显,极大链不可能在有实质的加细.

定理 14 (Schreier 加细定理). 在模格 L 中,连接元

$a,b,a<b$,的任意两个有限链都有等价的加细.

证明: 设 $a=x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n=b, a=y_1\leqslant y_2\leqslant\cdots\leqslant y_m=b$ 是连接 $a<b$ 的两个有限链. 令

$$x_{i,j}=(x_{i+1}\wedge y_j)\vee x_i \quad (i=1,\cdots,n-1;j=1,\cdots,m)$$

$$y_{j,i}=(x_i\wedge y_{j+1})\vee y_j \quad (i=1,\cdots,n,j=1,\cdots,m-1)$$

以下关系式明显成立:

$$x_{i,j}\leqslant x_{i,j+1}, y_{j,i}\leqslant y_{j,i+1}$$

$$x_{i,m}=(x_{i+1}\wedge b)\vee x_i=x_{i+1}, \quad x_{i+1,1}=(x_{i+2}\wedge a)\vee x_{i+1}=x_{i+1}$$

同样有 $y_{j,n}=y_{j+1,1}=y_{j+1}$. 于是我们有以下加细:

$$a=x_1=x_{1,1}\leqslant x_{1,2}\leqslant\cdots\leqslant x_{1,m}=x_2=x_{2,1}\leqslant x_{2,2}\leqslant\cdots$$
$$\leqslant x_{n-1,m}=x_n=b$$
$$a=y_1=y_{1,1}\leqslant y_{1,2}\leqslant\cdots\leqslant y_{1,n}=y_2=y_{2,1}\leqslant y_{2,2}\leqslant\cdots$$
$$\leqslant y_{m-1,n}=y_m=b$$

除等式不计外,以上两链各有(n−1)(m−1)+1 个元,从而构成(n−1)(m−1)个区间. 考虑区间 $[x_{i,j}, x_{i,j+1}]$ 与 $[y_{j,i}, y_{j,i+1}]$. 在 Zassenhaus 定理中,令 $a=x_i, a_1=x_{i+1}, b=y_j, b_1=y_{j+1}$,立刻得知两区间是相互射影的. ▌

把 Schreier 定理用到极大链上,立刻有

定理 15 ((Jordan−Hölder 定理). 设 L 是模格,$a=x_1\prec x_2\prec\cdots\prec x_n=b$ 和 $a=y_1\prec y_2\prec\cdots\prec y_m=b$ 是连接元 a,b 的两个极大链. 必有 $m=n$,并且区间族 $\{[x_i,x_{i+1}];i=1,\cdots,n-1\}$ 和 $\{[y_j,y_{j+1}];j=1,\cdots,n-1\}$ 之间存在着一个使对应区间相互射影的一对一关系. ▌

现在设 L 为一不含无穷链的有界模格. 根据 Jordan−Hölder 定理,连接最小元 0 和最大元 1 的极大链都由相同个元作成,或者说,它们都包含相同个素区间. 我们把

这种区间的个数称为格 L 的长,记作 $l(L)$. 对任意元 $a \in L$,$[0,a] \subseteq L$ 也是模格. 我们令 $l(a) = l([0,a])$称为元 a 的长. 按这个定义,$l(1) = l(L)$.

当 $a \leqslant b$ 时,我们有

$$l(b) = l(a) + l([a,b])$$

这里 $[a,b]$也是模格. 当 $a = b$ 时,我们自然应规定 $l([a,a]) = 0$. 由于在模格中$[a,a \vee b]$ 与$[a \wedge b,b]$同构,我们有

$$\begin{aligned} l(a \vee b) - l(a) &= l([a,a \vee b]) \\ &= l([a \wedge b,b]) = l(b) - l(a \wedge b) \end{aligned}$$

这就证明了关于模格的

定理 16 (维数定理). 对有限长的模格 L 中对任意元 a,b 都有以下等式

$$l(a \vee b) + l(a \wedge b) = l(a) + l(b)$$

成立. 】

模格在抽象代数中大量出现. 下述定理于 1900 年第一个为 R. Dedekind 所知,因此有的作者又把模格称为 Dedekind 格.

定理 17. 任意群 G 的全体正规子群作成模格.

证明. 注意这里正规子群格的运算就是第一章 § 2 例 4 中子群格的那些运算. 设 H,K 是 G 的任意两个正规子群,不难验证 $H \vee K = HK = \{hk | h \in H, k \in K\}$,当然还有 $H \wedge K = H \cap K$.

设 H,K,N 是 G 的任意三个正规子群,又 $H \supseteq N$. 我们来证明 $H \cap KN \subseteq (H \cap K)N$. 任意取元 $a \in H \cap KN$,我们有 $h \in H, k \in K, n \in N$ 使 $a = h = kn$. 于是 $k = hn^{-1} \in H$(由于 $H \supseteq N$). 就是说 $k \in H \cap K$. 从 $a = kn$ 得到 $a \in (H \cap K)N$. 】

类似地,不难证明,任意环的全体左(或右)理想作成模格;当 R 为一有单位元的环时,任意 R(左或右)模的全体子模也作成模格;如此等等.

作为本节的结束,我们引入有用的无关集的概念.

定义 18. 设 L 为一有 0 元的格. 子集 $I \subseteq L-\{0\}$ 称为一个**无关集**,如果对 I 的任意两个有限子集 X 和 Y 都有

$$\vee X \wedge \vee Y = \vee (X \cap Y)$$

由定义立刻知道,$I \subseteq L-\{0\}$ 是无关集的充要条件是 I 的每个有限子集都是无关集.

定理 19. 设 L 为一有 0 元的模格,有限子集 $I = \{a_1, \cdots, a_n\} \subseteq L-\{0\}$ 是无关集的充要条件是

$$(a_1 \vee \cdots \vee a_i) \wedge a_{i+1} = 0$$

对一切 $i = 1, \cdots, n-1$ 成立.

证明. 必要性显然.

对于充分性,考虑两个集 $X, Y \subseteq I$.先假定 $X \cap Y = \Phi$. 设 $X \cup Y$ 中出现的脚标最大的元是 a_k,不妨假定 $a_k \in Y$. 在本节推论 4 中,令 $a = \vee X, b = \vee (Y-\{a_k\}), c = a_k$. 由于现在有

$$(a \vee b) \wedge c = (\vee X \vee \vee (Y-\{a_k\})) \wedge a_k$$
$$\leqslant (a_1 \vee \cdots \vee a_{k-1}) \wedge a_k = 0$$

我们得到 $a \wedge (b \vee c) = a \wedge b$,即 $\vee X \wedge \vee Y = \vee X \wedge \vee (Y-\{a_k\})$. 这样我们就消去了 $X \cup Y$ 中一个元而保持所求的交不变. 继续这样做下去,总会出现 X,Y 中有一个是单元集,而另一集中所有元的脚标都小于这个单元的脚标的情况,就是说,总有 $\vee X \wedge \vee Y = 0 = \vee \Phi = \vee (X \cup Y)$.

对于一般情形形,我们有:

$$\vee X \wedge \vee Y = \vee X \wedge (\vee (Y-X) \vee \vee (X \cap Y))$$

$$=\bigvee(X\cap Y)\vee(\bigvee X\wedge\bigvee(Y-X))=\bigvee(X\cap Y),$$

这里$\bigvee X\wedge\bigvee(Y-X)=0$,因为$X\cap(Y-X)=\Phi$. 】

§2. 半模格

在§1中我们知道,作为同构定理的推论,对模格来说,总有

$$a\wedge b\prec a \Leftrightarrow b\prec a\vee b, \qquad (a,b\text{ 任意二元}).$$

有些重要的格并不满足这个条件而只满足其一部分,这导致以下概念.

定义 1. 格 L 称为一个半模格,如果对任意 $a,b\in L$ 有:

(SM_1) $\quad a\wedge b\prec a \Rightarrow b\prec a\vee b$

对偶地,如果总有:

$$a\prec a\vee b \Rightarrow a\wedge b\prec b$$

则 L 称为一个下半模格.

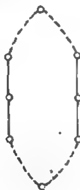


图 21

相应地,半模格有时也称为上半模格.

如前所述,模格既是半模格也是下半模格. 但反之不然,图21所示的格既是半模的,也是下半模的,但它不是模格.

图 22 所示是两个非模的半模格的例.

定义 2. 设 L 是格, $a,b \in L$, 我们说元 b **最多复盖** a, 如果有 $b \succ a$ 或 $b = a$.

利用定义 2, 半模格有以下等价定义

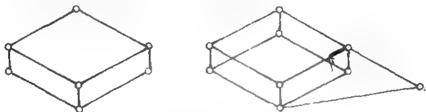


图 22

定理 3. **格 L 是半模格的充要条件是对任意元 $a,b,c \in L$ 有**

(SM_2) $\quad b \succ a \Rightarrow b \vee c$ **最多复盖** $a \vee c$.

证明. 设 L 为半模格, 又 $a,b,c \in L$ 有 $b \succ a$. 如果 $b \vee c \neq a \vee c$, 则 $b \nleq a \vee c$, 从而 $a \leqslant b \wedge (a \vee c) < b$. 由于 $a \prec b$, 有 $b \wedge (a \vee c) = a \prec b$. 按定义, $a \vee c \prec b \vee (a \vee c) = b \vee c$, 即 (SM_2) 成立.

反过来, 设有 (SM_2) 成立, 又 $a,b \in L, a \wedge b \prec a$. 于是有 $b = (a \wedge b) \vee b \prec a \vee b$ 或 $b = a \vee b$. 但后者不能成立, 因为否则有 $a \leqslant b$, 从而 $a \wedge b = a$ 与假设 $a \wedge b \prec a$ 矛盾. 故只能有 $b \prec a \vee b$, 即 L 是半模的. ▮

有些作者把满足下列条件:

(SM_3) $\quad a \wedge b \prec a,b \Rightarrow a,b \prec a \vee b$

的格称为半模格. 很明显, 我们有 $(SM_1),(SM_2) \Rightarrow (SM_3)$. 但反过来不成立(读者试举例说明这一点). 不过, 在 L 不含无穷链时, 我们有以下定理.

定理 4. **对不含无穷链的格 L, (SM_3) 与 $(SM_1),(SM_2)$ 等**

价.

证明. 只需证明(SM$_3$) $\Rightarrow$ (SM$_1$)

设(SM$_3$)成立,又 $a,b \in L, a\wedge b \prec a$. 不妨设 a,b 不可比. 设

$$a\wedge b = x_1 \prec x_2 \prec \cdots \prec x_n = b$$

是连接 $a\wedge b$ 到 b 的一个极大链. 根据假设条件,这样的极大链存在. 如图 23 所示,我们来证明对一切 $i=1,\cdots,n$ 都有 $x_i \prec a\vee x_i$,从而特别有 $b=x_n \prec a\vee x_n = a\vee b$,这就是(SM$_1$).

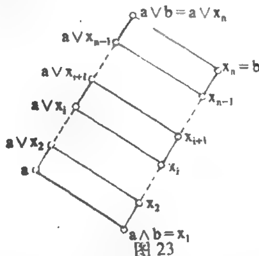


图 23

由于 $a\wedge b \prec a, x_2$,我们有 $a\wedge b = a\wedge x_2$(因为 a,x_2 不可比),从而根据(SM$_3$)有 $x_2 \prec a\vee x_2$. 设对于 i 已有 $x_i \prec a\vee x_i$,我们来证明 $x_{i+1} \prec a\vee x_{i+1}$. 由于 $x_i \prec x_{i+1}$,再注意到我们有$(a\vee x_i)\wedge x_{i+1} = x_i$. 事实上 $x_i \leqslant (a\vee x_i)\wedge x_{i+1} \leqslant x_{i+1}$,但不可能有$(a\vee x_i)\wedge x_{i+1} = x_{i+1}$,因为否则由 $x_i \prec x_{i+1} \leqslant a\vee x_i$ 将得出 $x_{i+1} = a\vee x_i$,从而 $a \leqslant x_{i+1} \leqslant b$ 与 a,b 不可比的假设相矛盾. 故我们已证得$(a\vee x_i)\wedge x_{i+1} = x_i \prec a\vee x_i, x_{i+1}$. 于是由(SM$_3$)得到 $x_{i+1} \prec (a\vee x_i)\vee x_{i+1} = a\vee x_{i+1}$. 归纳法于是完成. 】

仿照模格的情形,对一般格我们也可以引入格的长和元

的长的概念.

定义 4. 设 L 为一有 0 元的格,如果[0,a]上有最长的极大链,其长为 n,则我们说元 a 长为 n,记作 $l(a)=n$. 如果[0,a]上没有最长的极大链,则我们规定 $l(a)=\infty$. 如果 L 有界,又 $l(1)$为一有限数,则我们说 L 有有限长 $l(L)=l(1)$.

很明显,这里的长的概念是 § 1 中关于不含无穷链的模格中相应概念的推广.

应注意格 L 不含无穷链与它有有限长是两个不同的概念. 下图所示的就是一个有界格,它没有无穷链,但却不是有限长的.

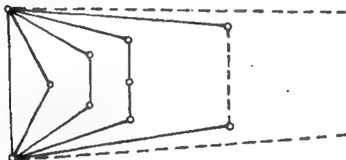


图 24

对于半模格,我们有:

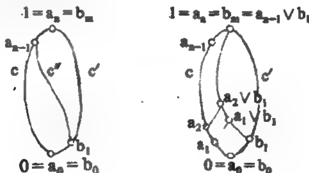


图 25

定理 5 (Jordan–Hölder 性质). 在有限长的半模格中,任意两个极大链等长.

证明. 设 $C=\{a_0,a_1,\cdots,a_n\}$,$0=a_0\lessdot a_1\lessdot\cdots\lessdot a_n=1$ 是半模格 L 中一个极大链,$n=l(L)$. 我们用归纳法证明 L 中任何其它极大链都有长 n.

当 $n=1$ 时,定理显然成立. 假设定理对长$<n$ 的半模格已经成立,我们来证对 $l(L)=n$ 的格 L 也成立. 设 $C'=\{b_0,b_1,\cdots,b_m\}$,$0=b_0\lessdot b_1\lessdot\cdots\lessdot b_m=1$ 是不同于 C 的 L 中另一极大链,我们证明有 $m=n$. 分两种情形讨论:

I. $b_1\leqslant a_{n-1}$(见上页图 25(a)). 取$[b_1,a_{n-1}]$上任一极大链 C''. 由于 $C-\{a_n\}$和$\{a_0\}\cup C''$都是半模格$(a_{n-1}]$(半模格的子格显然还是半模格)上的极大链,又 $C-\{a_n\}$显然长 $n-1$,按归纳法假定$\{a_0\}\cup C''$也长 $n-1$. 另一方面,$C'-\{a_0\}$与 $C''\cup\{a_n\}$都是$[b_1)$上的极大链,又都有长 $m-1$. 但$\{a_0\}\cup C''$与 $C''\cup\{a_n\}$显然同长,故有 $m-1=n-1$,即 $m=n$.

II. $b_1\not\leqslant a_{n-1}$. 这时由于 $a_{n-1}\lessdot a_n=1$, 有 $b_1\vee a_{n-1}=1$. 由于 $b_1\gtrdot b_0=0$,有 $b_1\wedge a_{n-1}=0$. 从而由定理 4 的证明知道,对一切 $i=1,\cdots,n-1$ 有 $a_i\lessdot a_i\vee b_1$. 由此可知对一切 $i=1,\cdots,n-1$ 都不能有 $a_i\vee b_1=a_{i+1}\vee b_1$,因为否则有 $a_i\vee b_1=a_{i+1}\vee b_1\gtrdot a_{i+1}\gtrdot a_i$,这当然不可能. 故由定理 3 知道有 $a_i\vee b_1\lessdot a_{i+1}\vee b_1$. 从而

$$b_1\lessdot a_1\vee b_1\lessdot\cdots\lessdot a_{n-1}\vee b_1=1$$

是$[b_1)$上的极大链,其长为 $n-1$,又 $C'-\{b_0\}$也是这种极大链,,但其长为 $m-1$. 故又得到 $m-1=n-1$,即 $m=n$. ▮

定理 6. 对有限长的格 L,以下条件等价:

(i) (SM_1):L是半模格.

(ii) (SM_2):对一切$a,b,c \in L, b \succ a \Rightarrow b \vee c$最多复盖$a \vee c$.

(iii) (SM_3):对一切$a,b \in L, a \wedge b \prec a,b \Rightarrow a,b \prec a \vee b$.

(iv) $a,b,c \in L, a \leqslant b$,C是$[a,b]$上的极大链,则$D = \{x \vee c \mid x \in C\}$是$[a \vee c, b \vee c]$上的极大链.

(v) $a,b \in L$,有$l(a \vee b) + l(a \wedge b) \leqslant l(a) + l(b)$.

证明. (i)–(iii)等价已知(定理 3 和 4). 又(iv)与(ii)显然是等价的. 故需要证明的只是条件(v).

(iv) $\Rightarrow$ (v). 由于(i)–(iv)等价,这时 L 有 Jordan–Hölder 性质. 任取$[a \wedge b, a]$上一个极大链 C,其长为$l(a)-l(a \wedge b)$. $D = \{x \vee b \mid x \in C\}$是$[b, a \vee b]$上的极大链,其长为$l(a \vee b)-l(b)$ 由(iv)知道 C 的长$\geqslant$D 的长,由此就得到$l(a \vee b)+l(a \wedge b) \leqslant l(a)+l(b)$

(v) $\Rightarrow$ (iii). (iii)明显在子格(0]上成立. 设 $x \in L$,我们假定对一切 $y \in L, y \prec x$,(iii)在(y]上已经成立,我们来证它在(x]上也成立. 由于 L 有有限长,这样一来(iii)就在 L 上成立了. 任取 $a,b \in (x]$,设有 $a \wedge b \prec a,b$. a 不能是 x,因为否则有 $a \wedge b = b$ 与 $a \wedge b \prec b$ 矛盾. 按归纳假定,(iii)在(a]上成立,于是有 $l(a)-l(a \wedge b)=1$. 由(v)我们得到

$$l(a \vee b) \leqslant l(a)+l(b)-l(a \wedge b)=l(b)+1$$

这说明 $a \vee b = b$ 或 $a \vee b \succ b$. 由于 $a \vee b = b$ 等价于 $a \wedge b = a$ 不成立,故有 $b \prec a \vee b$. 同理可证 $a \prec a \vee b$. ▮

对偶地有以下定理

定理 7. 对有限长的格 L,以下条件等价:

(i) L 是下半模格.

(ii) 对一切 $a,b,c \in L, b \succ a \Rightarrow b \wedge c$ 最多复盖 $a \wedge c$,

(iii) 对一切 $a,b, \in L, a,b \prec a \vee b \Rightarrow a \wedge b \prec a,b$.

(iv) $a,b,c \in L, a \leqslant b$，C是$[a,b]$上的极大链，则$D=\{x \wedge c \mid x \in C\}$是$[a \wedge c, b \wedge c]$上的极大链，

(v) $a,b \in L$，有$l(a \vee b)+l(a \wedge b) \geqslant l(a)+l(b)$. ▮

由定理6和7，对有限长的模格有如下刻划：

定理 8. 有限长的格L是模格的充要条件是L既是半模格又是下半模格.

条件的必要性已知. 对于充分性，我们引入一个有趣的概念.

定义 9. 格L上一个实函数$v(x)(x \in L)$称为L的一个赋值，如果对任意$x,y \in L$都有：

$$v(x \vee y)+v(x \wedge y)=v(x)+v(y)$$

如果还有

$$x<y \Rightarrow v(x)<v(y)$$

则$v(x)$称为**正赋值**

一个格L连同它上面的一个正赋值v称为一个**度量格**

定理 10. **度量格是模格.**

证明. 设L为一度量格，$v(x)$是它上面的正赋值. 由于$x \geqslant z$时，我们有$x \wedge y \wedge z=y \wedge z$，$x \vee y \vee z=x \vee y$，

$$\begin{aligned}v((x \wedge y) \vee z) &= v(x \wedge y)+v(z)-v(x \wedge y \wedge z)\\ &= v(x)+v(y)+v(z)-v(x \vee y)-v(y \wedge z),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v(x \wedge (y \vee z)) &= v(x)+v(y \vee z)-v(x \vee y \vee z)\\ &= v(x)+v(y)+v(z)-v(x \vee y)-v(y \wedge z)\end{aligned}$$

可见$v((x \wedge y) \vee z)=v(x \wedge (y \vee z))$. 由于v是正赋值，从$(x \wedge y) \vee z \leqslant x \wedge (y \vee z)$得到$(x \wedge y) \vee z=x \wedge (y \vee z)$，即L为一模格. ▮

定理 8 的证明. 我们只需证明定理条件成立时L为一度量格即可. 事实上，由于L既是半模格又是下半模格，根据

由定理 6 和 7 的(v),我们有

$$l(a \vee b)+l(a \wedge b)=l(a)+l(b)$$

故长函数 $l(x), x \in L$,是 L 的一个赋值. 它显然还是一个正赋值,故 L 是度量格. ∎

我们把具有一个正赋值 $v(x)$ 的格 L 称为度量格,是因为在这种格 L 上可以定义一个度量使之成为一个度量空间. 事实上,对于任意 $x, y \in L$,我们可以定义:

$$\rho(x,y)=v(x \vee y)-v(x \wedge y)$$

不难验证,ρ 满足度量三条件:对任意 $x,y,z \in L$,有

(i) $\rho(x,y) \geqslant 0, \rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$,

(ii) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$

(iii) $\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y)+\rho(y,z)$

(i).(ii)显然. 对于(iii),由于

$$\begin{aligned}v(x \vee y)+v(y \vee z)&=v((x \vee y) \vee (y \vee z))\\&\quad+v((x \vee y) \wedge (y \vee z)) \geqslant v(x \vee y \vee z)+v(y),\\v(x \wedge y)+v(y \wedge z)&=v((x \wedge y) \vee (y \wedge z))\\&\quad+v((x \wedge y) \wedge (y \wedge z)) \leqslant v(y)+v(x \wedge y \wedge z)\end{aligned}$$

两式相减,得到

$$\begin{aligned}\rho(x,y)+\rho(y,z) &\geqslant v(x \vee y \vee z)-v(x \wedge y \wedge z)\\&\geqslant v(x \vee z)-v(x \wedge z)=\rho(x,z)\end{aligned}$$

这就是(iii)

作为本节的结束,我们引入原子和原子格的概念,并在半模格中讨论原子集(由若干原子作成的集)的无关性条件.

定义 11. 设 L 为一有 0 元的格. $p \in L$ 称为 L 的一个原子,如果有 $p \succ 0$.

L 称为一个原子格,如果对 L 中每个元 $x \neq 0$,都有原子 p

使得 $p\leqslant x$.

原子的下述性质虽然简单但非常有用.

定理 12. 设 $p\succ 0$ 是格 L 的原子,则对任意元 $x,y\in L$ 都有:

(i) $p=x\vee y \Rightarrow p=x$ 或 $p=y$,即原子是并既约元,

(ii) $p\wedge x=0$ 或 $p\wedge x=p$.

证明. (i) $p=x\vee y$ 时,有 $0\leqslant x\leqslant p$. 由于 p 是原子,$p=x$ 或 $x=0$,但后者给出 $p=0\vee y=y$.

(ii) 对任意 $x\in L$,$0\leqslant p\wedge x\leqslant p$. 于是立即得出 $p\wedge x=0$ 或 $p\wedge x=p$. 】

定义 13. 设 L 为一有单位元 1 的格. $q\in L$ 称为 L 的一个对偶原子或反原子,如果 $q\prec 1$.

对偶原子总是交既约元,并且对任意 $x\in L$ 都有 $x\vee q=1$ 或 $x\vee q=q$.

关于原子集的无关性,我们有以下定理.

定理 14. 设 $I=\{p_1,\cdots,p_n\}$是半模格 L 中一个有限原子集,则以下条件等价:

(i) I 是无关集,

(ii) 对 $i=1,\cdots,n-1$ 有$(p_1\vee\cdots\vee p_i)\wedge p_{i+1}=0$

(iii) $l(p_1\vee\cdots\vee p_n)=n$.

证明. (i) ⇒ (ii) 显然

(ii) ⇒ (iii) 当(ii)成立时,由于有 $p_{i+1}\succ 0=(p_1\vee\ldots\vee p_i)\wedge p_{i+1}$,于是按定义有 $p_1\vee\cdots\vee p_i\vee p_{i+1}\succ p_1\vee\cdots\vee p_i(i=1,\cdots,n-1)$. 由此得出

$$p_1\vee\cdots\vee p_n\succ p_1\vee\cdots\vee p_{n-1}\succ\cdots\succ p_1\succ 0$$

即 $l(p_1\vee\cdots\vee p_n)=n$

(iii) ⇒ (i)任取子集 $X,Y\subseteq I$,令 $a=\vee X\wedge\vee Y$,$b=\vee(X$

$\cap Y$),我们来证明(iii)成立时总有 $a=b$,即(i)成立.

事实上,根据定理 6 的(v),我们有

$$l(\vee X)+l(\vee Y)\geqslant l(\vee X\vee\vee Y)+l(\vee X\wedge\vee Y)$$

即:

$$l(a)\leqslant l(\vee X)+l(\vee Y)-l(\vee(X\cup Y))$$
$$=|X|+|Y|-|X\cup Y|=|X\cap Y|=l(\vee(X\cap Y))=l(b).$$

这里由于(iii)有 $l(\vee X)=|X|$ 对任意 $X\subseteq I$ 成立.

另一方面,显然有 $a\geqslant b$.因而又有 $l(a)\geqslant l(b)$

于是 $l(a)=l(b)$. 再用 $a\geqslant b$,就得出 $a=b$. ▌

定义 15. 设 A 是格 L 的一个原子集,$S\subseteq A$ 是 A 的一个子集. 如果对每个原子 $p\varepsilon A$ 都有有限子集 $S_1\subseteq S$ 使得 $p\leqslant\vee S_1$,则我们说子集 S 张成 A.

定理 16. 设 A 是半模格 L 的一个原子集,$I\subseteq A$ 是一个无关子集,又 S: $I\subseteq S\subseteq A$ 张成 A,则存在 A 的一个无关子集 J 满足条件 $I\subseteq J\subseteq S$,J 张成 A.

证明. 设$\mathcal{X}$是满足条件 $I\subseteq X\subseteq S$ 的所有无关子集 X 作成的集. $\mathcal{X}$显然不空. 任取一链 $C\subseteq\mathcal{X}$. 由于集的无关性由它的有限子集确定,$\bigcup C$ 是无关子集,故$\mathcal{X}$满足 Zorn 引理的条件. 于是$\mathcal{X}$中有极大元 J 存在. 我们来证明 J 张成 A. 为此,我们只需证明 J 张成 S.

任取 $p\varepsilon S$. 如果 $p\varepsilon J$,则没有什么需要证明的. 因此不妨设 $p\varepsilon S-J$. 于是 $J\cup\{p\}$不再是无关的了. 从而有 J 的有限子集 J_1 使 $J_1\cup\{p\}$不是无关集. 根据定理 14,有 $l(\vee(J_1\cup\{p\}))<|J_1|+1$. 但 $l(\vee J_1)=|J_1|$又 $\vee(J_1\cup\{p\})\geqslant\vee J_1$,我们得到 $\vee(J_1\cup\{p\})=\vee J_1$,从而有 $p\leqslant\vee J_1$,就是说 J 张成 S. ▌

§3. 有补模格

定义 1. 设 L 为一有界格,a ε L. 如果有元 b ε L 使得

$$a \vee b = 1, \ a \wedge b = 0$$

则我们说 b 是 a 的一个**补元**. 这时,a 也是 b 的补元.

如果 L 的每个元都有补元,我们说 L 是一个**有补格**.

注意补元可以多于一个. 下图中,无论$\mathfrak{M}_3$还是$\mathfrak{N}_5$中元 a,b 都是元 c 的补元. 但两者又有所不同. 在$\mathfrak{M}_3$中,a,b 不可比;而在$\mathfrak{N}_5$中却有 a > b. 我们说,在$\mathfrak{N}_5$中元 c 有两个可比补.

定义 2. 如果格 L 中,有补元的补元总是一个,我们说格 L **有唯一补**. L 称为**有唯一可比补**,如果 L 中没有任何元有两个可比的补元.

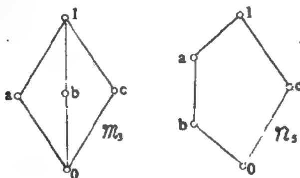


图 26

定义 3. 如果格 L 的每个区间[a,b]作为子格都是有补格,即对每个元 x ε [a,b]都有 y ε [a,b]使得 x ∨ y = b,x ∧ y = a,则我们说 L 是一个**相对有补格**. x,y 互称为对方在[a,b]上的**相对补**.

注意有补格与相对有补格是两个互不包含的概念. $\mathfrak{N}_5$ 是有补格但易知它不是相对有补格. 有界的相对有补格自然是有补格,但下例是相对有补格,却不是有补的.

例. 任取一个无穷集 E. 令 $L=\{A\subseteq E \mid A\text{ 有限}\}$按集包含关系,L 是一个格. 容易证明 L 是相对有补格,但它不是有补格,因为它没有最大元.

对于模格,我们有以下定理.

定理 4. **有补模格是相对有补的.**

证明. 设 L 为一有补模格,[a,b]是它的一个区间. 任取元 $x\in[a,b]$. 取 x 在 L 中的一个补元 z,令 $y=(z\vee a)\wedge b=(z\wedge b)\vee a$. 显然有 $y\in[a,b]$,利用 $x\vee z=1$ 和 $x\wedge z=0$,立刻得到

$$x\vee y=x\vee((z\vee a)\wedge b)=(x\vee z\vee a)\wedge b=b$$

$$x\wedge y=x\wedge((z\wedge b)\vee a)=(x\wedge z\wedge b)\vee a=a$$

这说明 y 是 x 在[a,b]上的补元. ▮

由定理 1.2.有以下唯一性定理.

定理 5. **有补模格有唯一可比补.** ▮

有趣的是,定理 4 和定理 5 的结论可以反过来刻划有补模格. 就是说,我们有

定理 6. **有界格 L 是有补模格的充要条件是 L 相对有补并且有唯一可比补.**

证明. 只有充分性需要证明. 根据定理 1.2,只需证明对任意三元 $a,b,c\in L,a\geqslant b$,可以从 $a\vee c=b\vee c,a\wedge c=b\wedge c$ 推出 $a=b$. 事实上,由于[0,c]是有补格,对 $a\wedge c\in[0,c]$有相对补元 $u\in[0,c]$. 由于[u,1]也是有补格,又 $u\leqslant c\leqslant a\vee c\leqslant 1$,$a\vee c$ 在[u,1]上又有相对补元 v,于是我们得到

$$a\vee v\geqslant b\vee v=b\vee(b\wedge c)\vee u\vee v$$

$$= b \vee (a \wedge c) \vee u \vee v = b \vee c \vee v = a \vee c \vee v = 1$$

$$b \wedge v \leqslant a \wedge v = a \wedge (a \vee c) \wedge v$$

$$= a \wedge u = a \wedge c \wedge u = 0$$

这说明 a,b 是元 v 的两个可比补,于是有 $a = b$. 】

我们注意到在上述证明中,实际上并未全部用到 L 相对有补这一条件. 用到的只是对一切 $a,b \in L$,区间[0,b]和[a,1]都有补,换句话说,用到的是下述性质.

定义 7. 设 L 为一有 0 元的格. 如果对一切 $b \in L$,区间[0,b]都有补,我们说 L 是**截断有补的**. 对于有 1 的格 L,如果对一切 $a \in L$,[a,1]都有补,则我们说 L 是**对偶截断有补的**,就是说,L 的对偶格是截断有补的.

于是,我们有以下推论.

推论 8. **有界格 L 是有补模格的充要条件是 L 截断有补和对偶截断有补并且有唯一可比补.** 】

下述定理给出有补格是截断有补和对偶截断有补的一个充分条件.

定理 9. **如果有补格 L 是原子格并有唯一可比补,则 L 截断有补和对偶截断有补.**

证明. 我们分成几步来进行.

Ⅰ.设 $x,p \in L$,$p \succ 0$,又 $x \vee p > x$,则对 $x \vee p$ 的任何补元 t 都有 $x \vee t \prec 1$,即 $x \vee t$ 是对偶原子

事实上,我们有

$$p \vee (x \vee t) = (x \vee p) \vee t = 1 > x \vee t,$$

因为 $x \wedge t \leqslant (x \vee p) \wedge t = 0$,又 x 和 $x \vee p$ 可比,这里不能再有 $x \vee t = 1$. 于是我们知道 $p \nleqslant x \vee t$. 由于 p 是原子,有 $p \wedge (x \vee t) = 0$(定理 2.12). 这说明 $x \vee t$ 是 p 的一个补元. 我们证明它是对偶原子. 假设有 $y \in L$ 使 $1 > y \geqslant x \vee t$. 自然有 $p \vee$

$y=1$. 如有 $p\wedge y\neq 0$ 则 $p\wedge y=p$. 从而有 $p\leqslant y, p\vee y=y<1$,这不可能,故必有 $p\wedge y=0$,即 y 也是 p 的补元. 由于 $y\geqslant x\vee t$,我们得到 $y=x\vee t$,即 $x\vee t$ 是对偶原子.

Ⅱ. 对每个 $x\in L, x\neq 1$,都有对偶原子 $q\prec 1$ 使得 $x\leqslant q$,换句话说,L 是对偶原子格(即对偶格是原子格).

如果 $x=0$. 任取 L 中一个原子 p. x,p 显然满足Ⅰ中的条件. 于是对 $p=0\vee p$ 的任何补元 $t, q=0\vee t=t\prec 1$ 满足要求.

如果 $x\neq 0$,则由于 $x\neq 1$, x 的任一补元 $y\neq 0$. 于是有原子 $p\leqslant y$. 如有 $x\vee p=x$,则 $p\leqslant x$,从而有 $x\wedge y\geqslant p$ 不可能,故有 $x\vee p>x$. 再由Ⅰ, $q=x\vee t$ 合于所求.

由于有补和有可比补都是自对偶性质,对 L 证明成立的命题的对偶命题在 L 中仍成立. 因此,由Ⅰ和Ⅱ推出.

Ⅲ. 如果 $x,q\in L, q\prec 1$ 又 $x\wedge q<x$,则对 $x\wedge q$ 的任何补元 t 都有 $0\prec x\wedge t$.

Ⅳ. 如果 $x,p\in L$ 又 $p\succ x\wedge p=0$,则 $x\vee p\succ x$.

令 $a=x\vee p$. 由 $x\wedge p=0$ 知道 $x\vee p>x$. 设 b 是 a 的补元,由Ⅰ知道 $1\succ x\vee b$. 令 $t=a\wedge(x\vee b)$,我们说有 $t<a$. 因为否则 $a\leqslant x\vee b$ 从而 $1=a\vee b\leqslant x\vee b$ 这不可能. 现在我们来证只要 $a>y\geqslant x$,就有 $t\geqslant y$.

事实上,由于这时有 $a=p\vee a\geqslant p\vee y\geqslant p\vee x=a$. 故有 $p\vee y=a$. 由此推出 $p\wedge y=0\prec p$. 由于 $y\vee p=a>y$ 又 $y\vee p=a$ 有补元 b,由Ⅰ有 $1\succ y\vee b$,但 $y\vee b\geqslant x\vee b$ 又已知 $1\succ x\vee b$,只能有 $x\vee b=y\vee b\geqslant y$,从而 $t=a\wedge(x\vee b)\geqslant y$. 由于 $a>t\geqslant x$,上述结论说明有 $a\succ t$.

以下只需证明 $t=x$ 就行了

为此,我们取 t 的一个补元 w,我们证明 x 也是 w 的补元

．显然有 $x\vee(a\wedge w)\leqslant a$．这里必有等号成立．因为否则可取 $x\vee(a\wedge w)$作为上面所说的 y,从而得到 $t\geqslant x\vee(a\wedge w)\geqslant a\wedge w$,$a\wedge w\leqslant t\wedge w=0$．而另一方面又有 $1=t\vee w\leqslant a\vee w$．于是 w 有互异的可比补 a 和 t,这不可能．故我们有 $x\vee(a\wedge w)=a$．从而得出

$$x\vee w=a\vee w\geqslant t\vee w=1, x\wedge w\leqslant t\wedge w=0.$$

这说明 x 也是 w 的补元．由于 $x\leqslant t$,有 $t=x$,于是Ⅳ获证．

Ⅴ．如果在 L 中有 $x>y$,则存在原子 $p\varepsilon L$ 使 $p\leqslant x$,但 $p\nleqslant y$.对偶地,存在对偶原子 $q\varepsilon L$ 使 $q\geqslant y$ 但 $q\ngeqslant x$.

假设一切 $p\leqslant x$ 都有 $p\leqslant y$．任取 y 的一个补元 v．由于 $x>y$,x 不是 v 的补元,故有 $x\wedge v>0$．于是有原子 $p\leqslant x\wedge v$．但由假设应有 $p\leqslant y$,从而有 $p\leqslant v\wedge y=0$,这当然不可能．对偶地,可证第二断言成立．

Ⅵ．对任意 $x,y\varepsilon L$ 有 $x\wedge y\prec x \Leftrightarrow y\prec x\vee y$．就是说 L 既是上半模的又是下半模的．

设有 $x\wedge y\prec x$．由Ⅴ,有原子 $p\leqslant x$ 但 $p\nleqslant x\wedge y$．于是 $x\geqslant p\vee(x\wedge y)\geqslant x\wedge y$．第二等式不能成立,故有 $x=p\vee(x\wedge y)$．从而由Ⅳ得到

$$x\vee y=p\vee(x\wedge y)\vee y=p\vee y\succ y$$

因为由 $p\nleqslant x\wedge y$ 显然有 $p\wedge y=0$．对偶地可证另一半结论．

Ⅶ．最后来证 L 是截断有补和对偶截断有补的．

任取 $x\varepsilon L$,我们证明区间$[0,x]$有补．不妨设 $x\neq 0$．任取 $y\leqslant x,y\neq 0$．设 v 是 y 的一个补元．令 $z=x\wedge v$,我们证明 z 是 y 在$[0,x]$上的补元．$y\wedge z=0$ 显然,需要证的是 $y\vee z=x$．根据Ⅴ,只要证明原子 $p\leqslant x$ 时总有 $p\leqslant y\vee z$ 就行了．

现在设有原子 $p\leqslant x$．如 $p\leqslant y$ 或 $p\leqslant v$ 中有一个成立,自然有 $p\leqslant y\vee z$．因此,我们可以假定 $p\wedge y=0=p\wedge v$．于是

由IV知道 $p\vee y\succ y$. 由VI和定理2.3的对偶,我们有:

$$v\wedge(p\vee y)=v\wedge y=0 \text{ 或 } v\wedge(p\vee y)\succ 0$$

由于 $v\vee p\vee y=1$,等式不能成立,因为否则 $p\vee y>y$ 也将是 v 的补元,而这不可能. 故只能有

$$s=v\wedge(p\vee y)\succ 0$$

由于 $x\geqslant y,p$,我们有 $z=v\wedge x\geqslant v\wedge(p\vee y)=s$ 又因为 $(p\vee s)\vee y=p\vee y\succ y$,由VI有

$$p\vee s\succ(p\vee s)\wedge y=r$$

这里 $r\wedge s=(p\vee s)\wedge y\wedge v\wedge(p\vee y)=0\prec s$. 再由VI,有 $r\vee s\succ r$,从而 $p\vee s\geqslant r\vee s\succ r$. 这就得到 $p\vee s=r\vee s$,并由此推出

$$y\vee z\geqslant r\vee s=p\vee s\geqslant p$$

定理于是证完. 】

由推论8和定理9立刻有

推论 10. **如果有补的原子格 L 有唯一可比补,则 L 是模格.**

§4. 几何格与模几何格

定义 1. 设 L 为一完备格. $a\in L$ 称为 L 的一个紧元,如果有 L 的子集 S 使得 $a\leqslant\bigvee S$,则必有 S 的有限子集 S_1 使得 $a\leqslant\bigvee S_1$

完备格称为**代数格**,如果它的每个元都是紧元的并.

代数格的重要例子是理想格和同余关系格.

定理 2. **如果格 L 有最小元 0,则理想格 $I(L)$是一个代数格.**

证明． 根据定理 1.3.19，这里 $I(L)$ 是完备格． 我们证明对任意元 $a \in L$，主理想 $(a]$ 是 $I(L)$ 的紧元． 事实上，如果有 $S \subseteq I(L)$ 使 $(a] \subseteq \vee S = \{x \in L \mid x \leqslant i_1 \vee \cdots \vee i_n, i_j \in I_j, j = 1,\cdots,n, I_j \in S\}$． 则当 $S_1 = \{I_1,\cdots,I_n\} \subseteq S$ 时，明显有 $(a] \subseteq \vee S_1$． 由于对任意 $I \in I(L)$ 都有

$$I = \vee\{(a] \mid a \in I\}$$

$I(L)$ 是代数格． 】

定理 3. **任意格 L 的同余关系格 $C(L)$ 都是代数格．**

证明． 根据定理 1.4.7，$C(L)$ 是完备格． 我们来证明对任意 $a,b \in L$ 总存在的主同余关系

$$\theta(a,b) = \wedge\{\varphi \in C(L) \mid a \equiv b(\varphi)\}$$

是 $C(L)$ 的紧元． 事实上，如有 $S \subseteq C(L)$ 使 $\theta(a,b) \leqslant \vee S$，则有 $a \equiv b(\vee S)$． 按定义，存在元序列 $a = c_1,\cdots,c_n = b$ 和同余关系 $\theta_1,\cdots,\theta_{n-1} \in S$ 使得对一切 $i = 1,\cdots,n-1$ 有 $c_i \equiv c_{i+1}(\theta_i)$． 令 $S_1 = \{\theta_1,\cdots,\theta_{n-1}\} \subseteq S$，我们有 $a \equiv b(\vee S_1)$，从而 $\theta(a,b) \leqslant \vee S_1$，$\theta(a,b)$ 是 $C(L)$ 的紧元．

对任意 $\theta \in C(L)$，显然有

$$\theta = \vee\{\theta(a,b) \mid a \equiv b(\theta)\}$$

故 $C(L)$ 是代数格． 】

定理4. **代数格L的区间[a,b]是代数格.**

证明． [a,b] 显然是完备的． 设 C 是 L 的紧元集，则对每个 $c \in C$，当 $c \leqslant b$ 时 $c \vee a$ 是 [a,b] 的紧元． 事实上，如有子集 $S \subseteq [a,b]$ 使 $c \vee a \leqslant \vee S$，则 $c \leqslant \vee S$． 于是有限子集 $S_1 \subseteq S$ 使 $c \leqslant \vee S_1$，当然也有 $c \vee a \leqslant \vee S_1$． 就是说，$c \vee a$ 是 [a,b] 的紧元． 现在任取 $x \in [a,b]$． 由于 L 是

代数格，$x=\bigvee C_1, C_1\subseteq C$。于是 $x=a\vee x=a\vee\bigvee C_1=\bigvee\{a\vee c|c\in C_1\}$。由于这里 $c\prec x\leqslant b$，等式说明 $[a,b]$ 仍然为一代数格。】

定义 5. 格 L 称为一个几何格，如果它是半模的原子的代数格，并且它的紧元正好是原子的全部有限并。

定理 6. 几何格 L 的区间 $[a,b]$ 是几何格。

证明. 设 L 是几何格，$[a,b]$ 是一个区间，由定理 4 知道 $[a,b]$ 是代数格。$[a,b]$ 的半模性明显。我们来证 $[a,b]$ 有原子集 $\{p\vee a \mid p\succ 0, p\nleqslant a, p\leqslant b\}$。由于 $p\nleqslant a$，$p\wedge a=0\prec p$，根据半模性有 $p\vee a\succ a$。由于 $p\vee a\leqslant b$，$p\vee a$ 是 $[a,b]$ 的原子。反过来，设 $p_1\succ a$ 是 $[a,b]$ 的原子，当然有 $p_1\leqslant b$。按定义，p_1 是 L 的原子的并，很明显，这些原子中至少有一个 p 有 $p\nleqslant a$。对于 $p\leqslant p_1\leqslant b$，已知 $p\vee a\succ a$。但 $p\vee a\leqslant p_1$，故有 $p_1=p\vee a$。这就证明了集 $\{p\vee a \mid p\succ 0, p\nleqslant a, p\leqslant b\}$ 正好是 $[a,b]$ 的原子集。$[a,b]$ 显然是原子格。剩下需要证明的是，$[a,b]$ 的全部紧元正好是它的原子的全部有限并。

设 c_1 是 $[a,b]$ 的一个紧元，$c_1=\bigvee S$，S 是 L 的一个原子集。这里每个 $p\in S$ 都有 $p\leqslant c_1\leqslant b$。两端同并一个 a，我们有 $c_1=c_1\vee a=\bigvee\{p\vee a \mid p\in S\}$。这里 $p\vee a\succ a$ 或 $p\vee a=a$ 视 $p\nleqslant a$ 或 $p\leqslant a$ 而定。后一种情形的项显然可以略去。由 c_1 的紧性知道有有限子集 $S_1\subseteq S$，使 $c_1=\bigvee\{p\vee a \mid p\in S_1\}$，即 c_1 是 $[a,b]$ 的原子的有限并。反过来，$[a,b]$ 的原子的有限并显然是紧的。定理于是证完。】

定理 7. 设 L 是几何格。L 中有有限长的元作成的

集 I 是 L 的一个理想，I 是半模的，它的每个元都是 L 的紧元，并且有 $L \cong \mathcal{I}(I)$.

证明． 设 $a, b \in I$. 当 $c \leqslant a$ 时有 $l(c) \leqslant l(a)$，故 $c \in I$. 由于 $[a \wedge b, a]$ 的长 $= l(a) - l(a \wedge b)$ 有限． 由定理 2.3，$[b, a \vee b]$ 的长也有限，故 $l(a \vee b)$ 有限，从而 $a \vee b \in I$，即 I 是一个理想． I 半模，以及它的元是 L 的紧元显然． 要证的是 $L \cong \mathcal{I}(I)$. 考虑映射 $\varphi: L \to \mathcal{I}(I)$，这里 $\varphi(a) = \{x \in I \mid x \leqslant a\}, a \in L$. 由于 L 的元都是原子的并，$a = \vee \varphi(a)$，故 φ 为一单射． 任取 $J \in \mathcal{I}(I)$. 令 $a = \vee J$，我们有 $\varphi(a) \supseteq J$ 但当 $x \in \varphi(a)$ 时，$x \leqslant a = \vee J$，由于 x 是紧元，有有限子集 $J_1 \subseteq J$ 使 $x \leqslant \vee J_1 \in J$，从而又有 $\varphi(a) \subseteq J$. 于是 $\varphi(a) = J$，φ 又是满的． 作为偏序集，φ 与 φ^{-1} 显然保序，故 φ 为一同构． 】

定理 8. **几何格是有补格，并且是相对有补格．**

证明． 由于定理 6，我们只需证明第一结论． 设 L 是几何格，$a \in L, a \neq 0$. 设 A 是 $\leqslant a$ 的原子集的一个极大无关子集． B 是一切 $\nleqslant a$ 的原子作成的集． 根据定理 2.16，存在一个极大无关集 I 满足条件 $A \subseteq I \subseteq A \cup B$，又 I 张成 $A \cup B$. 令 $b = \vee(I - A)$. 由于 $\vee A = a, \vee I = 1$，我们有 $a \vee b = 1$. 令 $c = a \wedge b$. 如果 $c \neq 0$，将有原子 $p \leqslant c$，于是有 $p \leqslant a = \vee A, p \leqslant b = \vee(I - A)$. 由 p 的紧性，有有限子集 $X \subseteq A, Y \subseteq I - A$ 使 $p \leqslant \vee X, p \leqslant \vee Y$，从而 $p \leqslant \vee X \wedge \vee Y = \vee(X \cap Y) = \vee \Phi = 0$，这不可能． 从而 $a \wedge b = 0$，即 b 是 a 的一个补元． 】

定义 9. 我们称$(A, ^{-})$为一个闭包空间，如果 A 是一个非空集，“$^{-}$”是从幂集 P(A)到自身的一个满足条件

(G_1) $X \subseteq \overline{X}$; $X \subseteq Y \Rightarrow \overline{X} \subseteq \overline{Y}$ 又 $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$

的映射，这里 $X \subseteq A$ 的像记作 $\overline{X}$.

闭包空间中满足条件 $\overline{X} = X$ 的子集 X 称为闭集． 显然，对任意 $X \subseteq A$，$\overline{X}$ 是包含 X 的最小闭集．

定理 10. 设 $(A,^-)$ 为一闭包空间，则

$$L(A,^-) = \{\overline{X} \mid X \subseteq A\}$$

（即全体闭集）对集包含关系来说是一个完备格，对一切 $S \subseteq L(A,^-)$ 有 $\wedge S = \bigcap S$． 反过来，如果 $L \subseteq P(A)$ 对于任意（集合）交封闭，则

$$\overline{X} = \bigcap\{Y \varepsilon L \mid Y \supseteq X\}$$

确定一个闭包空间 $(A,^-)$ 使得 $X \subseteq A$ 为一闭集当且仅当 $X \varepsilon L$.

证明． 作为练习题留给读者． 】

定义 11. 如果一个闭包空间 $(A,^-)$ 还满足以下条件：

(G2) $x \varepsilon \overline{X}$，则必存在有限子集 $X_1 \subseteq X$ 使 $x \varepsilon \overline{X}_1$，则这个闭包空间称为一个代数闭包空间．

对于代数闭包空间，我们有：

定理 12. 代数闭包空间 $(A,^-)$ 的闭子集格 $L = L(A,^-)$ 是代数格．

证明． 由定理 10，$L = L(A,^-)$ 是完备格． 考虑 L 的紧元． 我们证明，有限子集的闭包作成 L 的全部紧元．事实上，设 $X = \overline{X}_1$，X_1 有限，又有 $S \subseteq L$ 使 $X = \overline{X}_1 \leqslant \vee S = \overline{\bigcup S}$ 对每个元 $a \varepsilon \overline{X}_1$，有 $\bigcup S$ 的有限子集 $X_a = \{y_1, \cdots, y_{n_a}\}$，$y_i \varepsilon Y_i \varepsilon S$，$i = 1, \cdots, n_a$，使得 $a \varepsilon \overline{X}_a \subseteq \vee S_a$，这里 $S_a = \{Y_1, \cdots, Y_{n_a}\} \subseteq S$ 是 S 的有限子集． 由此知 $X = \overline{X}_1 \leqslant \vee_{a \varepsilon X_1} \overline{\{a\}} \leqslant \vee_{a \varepsilon X_1} \vee S_a \leqslant \vee S_1$，这里 S_1

$=\bigvee_{a\varepsilon X_1} S_a$ 是 S 的有限子集，即 X 是 L 的紧元． 反过来，如果 X 是 L 的紧元． 由于 $X \leqslant \bigvee\{\{a\}|a\ \varepsilon\ X\}$，我们有 $X_1=\{a_1,\cdots,a_n\}\subseteq X$ 使得 $X\leqslant\bigvee\{\{a_i\}|i=1,\cdots,n\}\leqslant\overline{X}_1\leqslant\overline{X}=X$，故 $X=\overline{X}_1$． 因此，$X=\overline{X}_1$，X_1 有限，是 X 为 L 的紧元的充要条件． 由于任意闭集 X 都有 $X=\bigvee\{\overline{\{x\}}|x\ \varepsilon\ X\}$，L 是代数格． ▌

定义 13. 如果代数闭包空间 $(A,^-)$ 还进一步满足条件：

(G3) $\overline{\Phi}=\Phi$，$\overline{\{x\}}=\{x\}$ $(x\ \varepsilon\ A)$，

(G4) $x\ \varepsilon\ \overline{X\cup\{y\}}$ 但 $x\ \bar{\varepsilon}\ \overline{X}$ 则 $y\ \varepsilon\ \overline{X\cup\{x\}}$，

则 $(A,^-)$ 称为一个几何．

对一个几何来说，代数格 $L=L(A,^-)$ 的最小元是 Φ. 由于单元集是闭集，它属于 L 并且是 L 的原子． 于是我们可以把 A 的元等同地看作是 L 的原子． $L=L(A,^-)$ 显然还是原子格，并且 A 就是它的全部原子集．

定义 14. 几何的闭子集称为子空间． 我们说子空间 $\overline{X}$ 是由子集 X 张成的．

定理 15. 设 $(A,^-)$ 是一个几何，则 $L=L(A,^-)$ 是一个几何格． 反过来，如果 L 是一个几何格，A 是 L 的全原子集． 对 $X\subseteq A$，用 $\overline{X}$ 记由 X 张成的原子集（定义 2.15），则 $(A,^-)$ 是一个几何并且有 $L\cong L(A,^-)$.

证明． 设 $(A,^-)$ 为一几何，则 $L=L(A,^-)$ 为一代数格，并且是以 A 为全原子集的原子格． 设 X 为一紧元，则 $X=\overline{X}_1$，X_1 有限，于是 $X=\overline{X}_1=\bigvee\{\{x\}\mid x\ \varepsilon\ X_1\}$ 即 L 的紧元是原子的有限并． 反过来，原子的有限并显然是紧元． 我们剩下要证明的是 L 的半模性． 我们先考察一

下 L 中复盖的情况．设 $X, Y \varepsilon L, Y = \overline{X\cup\{y\}}$ 但 $y \bar{\varepsilon} X$，我们证明有 $Y \succ X$．事实上，设有 $Z \varepsilon L$ 使 $X < Z \leqslant Y$．取 $z \varepsilon Z - X$，有 $z \varepsilon Z \leqslant Y = \overline{X\cup\{y\}}$．由于 $z \bar{\varepsilon} X = \overline{X}$，由 (G3)，有 $y \varepsilon \overline{X\cup\{z\}} \leqslant Z$，从而 $Y = \overline{X\cup\{y\}} \leqslant Z$，即有 $Z = Y$．故 $Y \succ X$．反过来，如已知 $Y \succ X$，我们证明对一切 $y \varepsilon Y, y \bar{\varepsilon} X$，都有 $Y = \overline{X\cup\{y\}}$．因为如果不然，对某个 $y \varepsilon Y$ 有 $y_1 \varepsilon Y - \overline{X\cup\{y\}}$．根据以上结果，有 $X \prec \overline{X\cup\{y\}} \prec \overline{\overline{X\cup\{y\}}\cup\{y_1\}} \leqslant Y$，

这与 $Y \succ X$ 相矛盾，故只能有 $Y = \overline{X\cup\{y\}}$．现在任取元 $Z \varepsilon L$．我们有 $Y \vee Z = \overline{Y\cup Z} = \overline{X\cup Z\cup\{y\}}$ $= \overline{\overline{X\cup Z}\cup\{y\}}, X \vee Z = \overline{X\cup Z}$．如有 $y \varepsilon \overline{X\cup Z}$，则 $X \vee Z = Y \vee Z$；否则有 $X \vee Z \prec Y \vee Z$，故 $Y \vee Z$ 最多复盖 $X \vee Z$，从而 L 是半模格．故 L 是几何格．

反过来，设已知 L 为一几何格，A 是它的全原子集．把 $X \subseteq A$ 张成的原子集定义为 $\overline{X}$．很明显，$(A, ^{-})$ 满足条件 (G1),(G2) 和 (G3)．于是 $L(A, ^{-})$ 是一个代数格．我们先证明 $L(A, ^{-})$ 与 L 同构．任取 $X \varepsilon L(A, ^{-})$，X 是 $(A, ^{-})$ 的闭子集．我们规定 $\varphi(X) = \vee X \varepsilon L$，$\varphi$ 确定了 $L(A, ^{-})$ 到 L 的一个映射．按定义 φ 是保序的．对任意 $x \varepsilon L$，$X = \{a \varepsilon A | a \leqslant x\}$ 显然是闭集，由于 L 是几何格，还有 $x = \vee X = \varphi(x)$，就说明 φ 是满射也是单射．很明显，φ^{-1} 也保序，这就证明了 $L(A, ^{-}) \cong L$，从而 $L(A, ^{-})$ 也是半模格．我们利用这一点来证明 $(A, ^{-})$ 满足 (G4)．事实上，设有 $x \varepsilon \overline{X\cup\{y\}}$ 但 $x \bar{\varepsilon} \overline{X}$．因为在 $L(A, ^{-})$ 中有 $\{y\} \succ \Phi = \overline{X} \wedge \{y\}$，由 $L(A, ^{-})$ 的半模性知道 $\overline{X\cup\{y\}} = \overline{X} \vee \{y\} \succ \overline{X}$，由于 $\overline{X} < \overline{X\cup\{x\}} \leqslant \overline{X\cup\{y\}}$，我们得到 $\overline{X\cup\{x\}} = \overline{X\cup\{y\}}$，从

而 $y \in \overline{X \cup \{x\}}$, 故 (G4) 也成立． 定理于是证完． ▌

下面我们引用一个图论中的有趣的例.

所谓图 (这里指的是无圈的无定向的简单图), 是一个集 G 连同它的一个由某些二元子集作成的集 E． E 中的元称为图 G 的棱 ,E 称为棱集． G 中的元则称为图的顶点 (简称点)． 我们在平面上用一些小园圈来标志图 G 的顶点． 顶点 a,b 在图上用一个线段连接起来，当且仅当 $\{a,b\} \in E$． 这样就得到一个图 $G=(G,E)$ 在平面上的表示． 图 27 所示的是一个图 (无圈无定向的简单图)

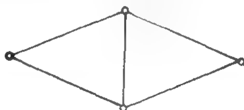


图27

设 $a,b \in G$ 是两个顶点 ,$X \subseteq E$ 是棱集的一个子集．我们说点 a,b 是 X－ 连通的，如果有一串棱 $\{x_0,x_1\},\{x_1,x_2\},\cdots,\{x_{n-1},x_n\} \in X$ 使得 $a=x_0, x_n=b$. 现在我们在 E 上定义一个称为棱几何的几何如下：对于 $\{a,b\} \in E, X \subseteq E$, 规定 $\{a,b\} \in \overline{E}$ 当且仅当 a 和 b 是 X－ 连通的． 我们有:

定理 16. $(E,\bar{\ })$ 是一个几何．

证明. 只要验证(G4),其余条件明显成立.

设 $a,b \in G$ 是 X－ 连通的，不难知道 ,X 中存在一个最短序列 $\{x_0,x_1\},\cdots,\{x_{n-1},x_n\}$ 连接 a,b, 序列中任何一条棱

都不重复出现，现在设 $x \varepsilon \overline{X \cup \{y\}}$，但 $x \bar{\varepsilon} \overline{X}$． 设 $x = \{a,b\}, y = \{c,d\}$． 设 $e_0, e_1, \cdots, e_{n-1} \varepsilon X \cup \{y\}$ 是上面所说那种连接 a,b 的最短序列． 由于 $x \bar{\varepsilon} \overline{X}$, $e_0, \cdots, e_{n-1}$ 中有一个是 y，设 $y = e_i$，则棱序列 $e_{i+1}, \cdots, e_{n-1}, x, e_0, \cdots, e_{i-1}$ 在 $X \cup \{x\}$ 中把 c,d 连接起来，从而 $y \varepsilon \overline{X \cup \{x\}}$． ▮

对应于图 27 中那个简单图的棱几何的几何格,其 Hasse 图见图 28,这个格称为图 27 的棱格.

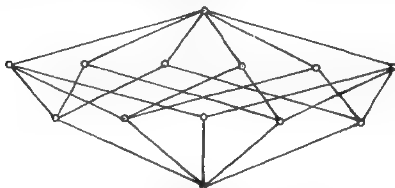


图 28

作为本节的结束,我们引入射影空间的概念,并讨论它与模几何格的关系.

定义 17. 设 A 为一非空集,$L \subseteq P(A)$是 A 的一个子集族. (A,L)称为一个射影空间,如果有以下条件成立:

(PG1) 每个 $l \varepsilon L$ 至少含有两个元,

(PG2) 对任意两个不同元 $p,q \varepsilon A$,正好有一个 $l \varepsilon L$ 使得 $p,q \varepsilon l$.

(PG3) 对 $p,q,r,x,y \varepsilon A, l_1, l_2 \varepsilon L$, 如有 $p,q,x \varepsilon l_1$, $q,r,y \varepsilon l_2$, 则必有 $z \varepsilon A$, $l_3, l_4 \varepsilon L$ 使得 $p,r,z \varepsilon l_3, x,y,z \varepsilon l_4$. (图29)

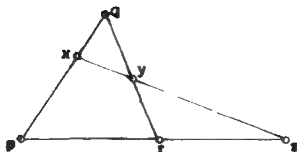


图 29

这里(PG1)的含义是：射影空间中一条直线上至少有两个点;(PG2)说明两个不同点决定唯一条直线;(PG3)的意思是共面的两条直线总有交点,这是欧氏空间所没有的性质.

我们把 A 中的元称为空间中的点,L 中的元称为空间中的直线. 对 $p,q\in A,p\neq q$,q,p 确定的直线记作 $p+q$. 在退化情形,$p=q$ 时,我们约定 $p+q=\{p\}$.

定义 18. $X\subseteq A$ 称为射影空间(A,L)的一个线性子空间,如果对一切 $p,q\in X$ 都有 $p+q\subseteq X$.

对 A 的任意子集 X,Y,我们规定

$$X+Y=\bigcup\{x+y\mid x\in X,y\in Y\}$$

定理 19. 当 X,Y 都是线性子空间时,X+Y 也是线性子空间.

证明. 任取 $x,y\in X+Y$,我们证明 $r\in p+q\Rightarrow r\in X+Y$. 当 $p,q\in X$ 或 $p,q\in Y$ 或 $p\in X,q\in Y$ 或 $p\in Y,q\in X$ 时,按定义和假设条件都有 $p+q\subseteq X+Y$. 因为不妨设 p,q 中至少有一个不属于 $X\cup Y$. 为确定计,设 $p\bar{\in} X\cup Y$. 分两种情形讨论.

1. $q\in X\cup Y$. 不妨设 $q\in X$(图30). 按定义

有 $p_x \varepsilon X, p_y \varepsilon Y$ 使 $p \varepsilon p_x + p_y$. 现在任取一点 $r \varepsilon p + q$. 显然不妨设 p,q,r,p_x 和 p_y 都不同. 根据 (PG3), 有点 $t \varepsilon p_x + q, t \varepsilon r + p_y$. 从第一式知道 $t \varepsilon X$, 再由第二式推出 $r \varepsilon t + p_y \subseteq X + Y$.

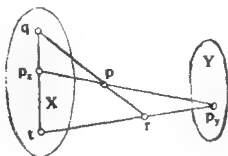


图30

Ⅱ、$q \bar{\varepsilon} X \cup Y$(下页图 31). 还是用 (PG3) 得到一个 $t \varepsilon p_x + q$, 并有 $r \varepsilon t + p_y$. 两次用已经证明的情形 Ⅰ, 先得到 $t \varepsilon X + Y$, 然后就有 $r \varepsilon X + Y$. ▌

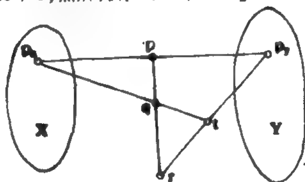


图 31

定理 20. 射影空间 (A,L) 的线性子空间作成一个模几何格.

证明. 我们先在 A 上定义一个闭包运算 "¯"

使 $(A,\bar{\ })$ 成为一个闭包空间． 对 $X \subseteq A$，作序列 $X_0 = X, X_1 = X_0 + X_0, \cdots, X_n = X_{n-1} + X_{n-1}, \cdots$． 令 $\overline{X} = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$． 很明显，$\overline{X}$ 是一个线性子空间． 我们证明 $(A,\bar{\ })$ 是一个几何． (G1),(G2),(G3) 明显成立． 因而 $(A,\bar{\ })$ 首先已是一个代数闭包空间． 我们先证代数格 $L(A,\bar{\ })$ 正好是 (A,L) 的线性子空间作成的格． 事实上，任意线性子空间 X 显然有 $X + X = X$，从而有 $\overline{X} = X$，即 X 是闭集，$X \in L(A,\bar{\ })$，反过来，对任意 $X \in L(A,\bar{\ })$，有 $X = \overline{X}$，即 X 是线性子空间，现在我们来证 $L(A,\bar{\ })$ 是模格．设 $X,Y,Z \in L(A,\bar{\ })$，又 $X \geqslant Z$． $(X \wedge Y) \vee Z \leqslant X \wedge (Y \vee Z)$ 总成立． 设有 $p \in X \wedge (Y \vee Z)$，$p \in X$ 并且 $p \in Y \vee Z$． 根据定理 19，$Y \vee Z = Y + Z$． 如有 $p \in Y \cup Z$，$p \in (X \wedge Y) \vee Z$ 成立． 故可设 $p \bar{\in} Y \cup Z$． 于是有 $p_y \in Y, p_z \in Z$，使 $p \in p_y + p_z$． 但 $X \geqslant Z$，有 $p_z \in X$． 当 $p \neq p_z$ 时，$p_y \in p + p_z \subseteq X$，即 $p_y \in X \wedge Y$，从而有 $p \in (X \wedge Y) \vee Z$． $p = p_z$ 时当然更成立． 总之有 $X \wedge (Y \vee Z) \leqslant (X \wedge Y) \vee Z$． 从而 $L(A,\bar{\ })$ 是模格．

利用这个模性,和定理 15 的证明一样(那里只有半模性),立刻知道(G4)也成立. 故$(A,\bar{\ })$是一个几何,而 $L(A,\bar{\ })$(它正是射影空间(A,L)的线性子空间格)是几何格,并且是一个模几何格. 】

由定理 8,还有:

推论 21. 射影空间的线性子空间格是有补模格. 】

第二章习题

1. 验证定理 1.1 证明中出现的子格$\{x,y,z,a\wedge b,a\vee b\}$的确是一个五边形.

2. 证明对一切 $a,b,c\in L$ 有等式:

$$(a\vee(b\wedge c))\wedge(b\vee c)=(a\wedge(b\vee c))\vee(b\wedge c)$$

成立是 L 为模格的一个充要条件.

3. 证明有限格 L 是模格的充要条件是 L 不含满足 $a>b$ 的五边形.

4. 设 L 是模格,$a,b\in L$. 证明对任意 $x,y\in[a,a\vee b]$,有:

$$b\wedge(x\vee y)=(b\wedge x)\vee(b\wedge y)$$

又对任意 $x,y\in[a\wedge b,b]$,有:

$$a\vee(x\wedge y)=(a\vee x)\wedge(a\vee y).$$

5. 证明在 Kurosc－Orc 定理证明中,当 $a=a_1\vee\cdots\vee a_n=b_1\vee\cdots\vee b_m$ 都是无赘分解时,$a=a_1\vee\cdots\vee a_{i-1}\vee b_j\vee a_{i+1}\vee\cdots\vee a_n$ 也是一个无赘分解.

6. 对有 0 的模格 L,规定 $I\subseteq L-\{0\}$为无关集当且仅当对任意有限子集 $X,Y\subseteq I$ 有 $X\cap Y=\Phi\Rightarrow\bigvee X\wedge\bigvee Y=0$. 证明这个定义对模格与定义 1.18 等价.

7. 定理 1.7 中假定只有 φ,ψ 之一对一切 $a,b\in L$ 成立,问还能否保证 L 是模格?

8. 举例说明$(SM_3)\nRightarrow(SM_1)$(或(SM_2)).

9. 设 L 为半模格,$p,q,a\in L$,p,q 是原子.证明 $a<a\vee p\leq a\vee q\Rightarrow a\vee p=a\vee q$.

10. 证明格 L 的一切子格都是半模格的充要条件是 L 为一模格.

11. 证明: (i)半模格的凸子格是半模格;(ii)凸字不能从(i)中去掉.

12. 格 L 的有序元对(a,b)称为一个模对,记作 aMb,如果对任意 $x \in L$,有 $x \leqslant b \Rightarrow x \vee (a \wedge b) = (x \vee a) \wedge b$. 格 L 称为是 M—对称的,如果对任意 $a,b \in L$,有 $aMb \Rightarrow bMa$. 证明对任意 $a,b \in L$,如有 aMb 又在 L 的对偶格中有 bMa,则 $[a \wedge b, b] \cong [a, a \vee b]$.

13. 设 L 为一格,$a,b \in L$,则以下条件等价:

(i) aMb,

(ii) $\varphi_b:[a, a \vee b] \to [a \wedge b, b]$是满射,这里 $\varphi_b(x) = x \wedge b$,

(iii) $\psi_a:[a \wedge b, b] \to [a, a \vee b]$是单射,这里 $\psi_a(y) = y \vee a$.

14. 设 E 为一无穷集,$L = \{A \subseteq E | A \text{ 有限}\}$按集包含关系为一格. 证明 L 是相对有补格但不是有补格.

15. 设 L 为一几何格. 证明 L 中每个元都是一个无关的原子集的并.

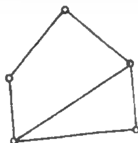


图 32

16. 设 L 为一有界格,$a,b \in L$. 我们说 a,b **相互透视**,如果它们有共同的补元,这时我们记作 $a \sim b$. 证明在几何格中,如有元 x 使 $a \wedge x = b \wedge x = 0, a \vee x = b \vee x$,则 $a \sim b$.

17. 证明在几何格中,$a\sim b$ 的充要条件是存在元 x 使 $a\wedge x=b\wedge x, a\vee x=b\vee x$.

18. 画出图 32 所示的无圈无定向简单图的棱几何格的 Hasse 图.

19. 证明定理 4.10.

20. 设 L 为一模几何格,(A, ¯)是相应的几何(称为相应于 L 的射影几何),则对 $p,q\in A, p\neq q, p\sim q$ 的充要条件是存在 $r\in A, r\neq p,q$,使得 $r\leqslant p\vee q$(注意 A 是 L 的原子集).

[提示: 注意几何格是有补格,找到 r 后,利用 $l(r)=1$ 来证明 $r\in A$,这里 $l(x)$是长函数.]

21. 设 L 为一模几何格,(A, ¯)是相应的几何,则当 $p,q,r,x,y\in A$ 又 $x\leqslant p\vee q, y\leqslant p\vee r$ 并且 $x\neq y$ 时,存在一个 $z\in A$ 使得 $z\leqslant (p\vee q)\wedge(x\vee y)$.

[提示: 先考虑$|\{p,q,r,x,y\}|<5$ 的情形. 对 $=5$ 的情形再分 $r\leqslant p\vee q$ 和 $r\nleqslant p\vee q$ 两种情形讨论. 本题所述性质实即关于射影空间的条件(PG3).]

第三章　分配格

§1. 分配格的特征

和模格的情形一样,分配格也有一个简单而实用的判定条件.

定理 1. 格 L 是一个分配格的充要条件是它不含任何五边形 $\mathfrak{N}_5$ 和菱形 $\mathfrak{M}_3$(下图).

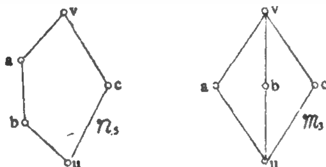


图33

证明. 必要性显然.

对于充分性,由于不含 $\mathfrak{N}_5$,根据定理 II.1.1,L 是模格. 下面用反证法,假定 L 不是分配格,根据定义,有 a,b,c ∈ L 使

$$v=(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)>(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)=u$$

由L的模性,令

$$x=(b\wedge c)\vee(a\wedge(b\vee c))=(b\vee c)\wedge(a\vee(b\wedge c)),$$

$$y=(c\wedge a)\vee(b\wedge(c\vee a))=(c\vee a)\wedge(b\vee(c\wedge a)),$$

$$z=(a\wedge b)\vee(c\wedge(a\vee b))=(a\vee b)\wedge(c\vee(a\wedge b)).$$

直接计算知道

$$\begin{aligned}x\vee y&=(a\wedge(b\vee c))\vee(b\wedge(c\vee a))\\&=(b\vee c)\wedge(a\vee(b\wedge(c\vee a)))\\&=(b\vee c)\wedge(a\vee b)\wedge(c\vee a)=v\end{aligned}$$

对称地有 $y\vee z=z\vee x=v=x\vee y$. 对偶地有 $x\wedge y=y\wedge z=z\wedge x=u$. 现在我们证明 x,y,z,u,v 等五元中任意两元互异. 事实上,设有 $x=y$,则 $v=x\vee y=x\wedge y=u$,这不可能. 同理也不可能有 $y=z$ 或 $z=x$. 如果有 $x=v$,我们得出 $u=x\wedge y=v\wedge y=y$. 从而 $v=y\vee z=u\vee z=z$,于是有 $x=z$ 而这已知不可能. 故 $x\neq v$,同理 $y,z\neq v$. 对偶地 $x,y,z\neq u$. 于是 $\{x,y,z,u,v\}$ 作成 L 中一个菱形,与定理条件相矛盾. ∎

定理 2. **格 L 是分配格的充要条件是对任意三元** $a,b,c\in L$ **都有**

$$a\vee c=b\vee c,\ a\wedge c=b\wedge c\ \Rightarrow\ a=b$$

证明. 对于充分性,如果 L 不是分配格,根据定理 1,它含有一个 $\mathfrak{N}_5$ 或 $\mathfrak{M}_5$(图 33). 不管那种情形都有 $a\vee c=b\vee c, a\wedge c=b\wedge c$ 但 $a\neq b$. 故条件是充分的.

对于必要性,进行直接计算,当 $a\vee c=b\vee c, a\wedge c=b\wedge c$ 时,有

$$\begin{aligned}a&=a\vee(a\wedge c)=a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)\\&=(a\vee b)\wedge(b\vee c)=b\vee(a\wedge c)=b\vee(b\wedge c)=b.\end{aligned}$$ ∎

定理2的另一种叙述法是:

定理 3. **格 L 是分配格的充要条件是它的任何元在(包含它的)任何区间上都最多只有一个补元.** 】

定义 4. 有补的分配格称为 Boole 格.

定理 5. **有界格 L 是 Boole 格的充要条件是它有唯一补并且相对有补.**

证明. 必要性显然.

对于充分性,根据定理Ⅱ.3.6,L 是模格. 现在设 a、b、c ε L 有 $a\vee c=b\vee c, a\wedge c=b\wedge c$. 由于相对有补,可在[0,c]上取 $a\wedge c=b\wedge c$ 的一个补元 u,再在[u,1]上取 $a\vee c=b\vee c$ 的一个补元 v,我们有

$$a\wedge v=a\wedge(a\vee c)\wedge v=a\wedge u=(a\wedge c)\wedge u=0,$$
$$b\wedge v=b\wedge(b\vee c)\wedge v=b\wedge u=(b\wedge c)\wedge u=0,$$
$$a\vee v=a\vee(a\wedge c)\vee v=a\vee(a\wedge c)\vee u\vee v=(a\vee c)\vee v=1,$$
$$b\vee v=b\vee(b\wedge c)\vee v=b\vee(b\wedge c)\vee u\vee v=(b\vee c)\vee v=1.$$

由于 L 有唯一补,得出 a=b.故按定理 2 L 是一个分配格. 】

推论 6. **有界格 L 为 Boole 格的充要条件是 L 有唯一补并且截断有补和对偶截断有补.**

证明. 只需证充分性. 根据推论Ⅱ.3.8,L 是模格. 再由定理Ⅱ.3.4,L 相对有补. 于是从定理 5 知道 L 是 Boole 格. 】

推论 7. **如果有补的原子格 L 有唯一补,则 L 为一 Boole 格**(定理Ⅱ.3.9 的直接推论) 】

我们已知度量格是模格,它是一个分配格的条件如下

定理 8. 设 $v(x)$ 为度量格 L 的正赋值. L 是分配格的充要条件是对一切 $x,y,z\in L$ 有

$$v(x\vee y\vee z)-v(x\wedge y\wedge z)=v(x)+v(y)+v(z)-v(x\wedge y)-v(y\wedge z)-v(z\wedge x).$$

证明. 如果 L 是分配格,则

$$\begin{aligned}v(x\vee y\vee z)&=v(x)+v(y\vee z)-v(x\wedge(y\vee z))\\&=v(x)+v(y)+v(z)-v(y\wedge z)-v((x\wedge y)\vee(x\wedge z))\\&=v(x)+v(y)+v(z)-v(y\wedge z)-v(z\wedge x)-v(x\wedge y)\\&\quad+v(x\wedge y\wedge z).\end{aligned}$$

移项就得到所要的等式.

反过来如果等式成立,我们有

$$\begin{aligned}v(x\wedge(y\vee z))&=v(x)+v(y)+v(z)-v(y\wedge z)-v(x\vee y\vee z)\\&=v(x\wedge y)+v(x\wedge z)-v(x\wedge y\wedge z)=v((x\wedge y)\vee(x\wedge z))\end{aligned}$$

由于 $x\wedge(y\vee z)\geqslant(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$,又 v 是一个正赋值,我们得出 $x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$,即 L 为一分配格. 】

§2. 集环与集域

定义 1. 记集 X 的幂集为 $P(X)$. 非空子集族 $S\subseteq P(X)$ 称为一个**集环**,如果对任意 $A,B\in S$ 都有 $A\cup B,A\cap B\in S$.

设 S 为一集环,如果对任意 $A\in S$,还有补集 $A'=X-A\in S$,则 S 称为一个**集域**.

很明显,对运算∪和∩,任意集环都是分配格,而集域则是 Boole 格. 对后者,我们有 $A\cup A'=X, A\cap A'=\Phi$,X 和 Φ 分别是 Boole 格的单位元和零元.

一个重要的事实是,任何分配格实质上都是一个集环,任何 Boole 格都是一个集域. 我们下面就来讨论这个问题. 不过我们先得做一点准备工作.

定理 2. 格 L 是分配格的充要条件是对任意 $I,J \in \mathcal{I}(L)$ 都有

$$I \vee J = \{i \vee j \mid i \in I, j \in J\}$$

证明 根据定理 I.3.16, 有

$$I \vee J = \{x \in L \mid x \leqslant i \vee j, i \in I, j \in J\}$$

当 L 是分配格时 ,$x = x \wedge (i \vee j) = (x \wedge i) \vee (x \wedge j) = i_1 \vee j_1$, 这里 $i_1 \in I, j_1 \in J$.

反过来, 如果 L 不是分配格, 则它含有 $\mathfrak{M}_5$ 或 $\mathfrak{N}_5$ 作为子格(图 33). 取 $I = (b], J = (c]$, 有 $a \leqslant b \vee c$, 故 $a \in I \vee J$. 但如有 $i \in I, j \in J$ 使 $a = i \vee j$, 则 $i, j \leqslant a$. 但 $j \leqslant c$, 故 $j \leqslant a \wedge c = u \leqslant b$, 于是 $a = i \vee j \leqslant b$, 这不可能, 即条件成立时 L 只能是分配格.

定理 3. (Stone 引理) 设 L 为一分配格, I 是 L 的理想, F 是 L 的滤斗. 如有 $I \cap F = \Phi$, 则必有素理想 $P \supseteq I$ 使得 $P \cap F = \Phi$.



图 34

证明． 令 $\mathcal{X}=\{J\in I(L)\mid J\supseteq I, J\cap F=\Phi\}$. 由于 $I\in\mathcal{X}$, $\mathcal{X}\neq\Phi$. 设 C 是偏序集 $(\mathcal{X},\subseteq)$ 的一个链．令 $K=\bigcup C=\bigcup\{J\mid J\in C\}$. 显然有 $K\supseteq I, K\cap F=\Phi$, 我们证明 $K\in\mathcal{X}$. 为此，只需证明 $K\in I(L)$. 任取 $a,b\in K$, 有 $J_1,J_2\in C$, 使得 $a\in J_1, b\in J_2$, 由于 C 是链，有 $J_1\subseteq J_2$ 或 $J_2\subseteq J_1$，不妨设后者成立，于是有 $a,b\in J_1$，从而 $a\vee b\in J_1\subseteq K$. 类似可证，当 $a\in K$ 又 $x\leqslant a$ 时有 $x\in K$. 故 $K\in I(L)$, 从而 $K\in\mathcal{X}$. 于是对 $\mathcal{X}$, Zorn 引理的条件成立． 故 $\mathcal{X}$ 中有极大元存在． 设 P 是这样一个极大元，则 P 就合于定理的要求． 事实上，由于 $P\in\mathcal{X}$, 有 $P\supseteq I$ 并且 $P\cap F=\Phi$. 需要证 P 是素理想． 如果不然，则将有 $a,b\bar{\in}P$ 但 $a\wedge b\in P$, 由于 P 是 $\mathcal{X}$ 中的极大元，有 $(P\vee(a])\cap F\neq\Phi$, $(P\vee(b])\cap F\neq\Phi$. 于是有 $p,q\in P$ 使得 $p\vee a\in F$, $q\vee b\in F$. 由于 F 是漏斗，我们得到 $(p\vee a)\wedge(q\vee b)\in F$. 但是

$$(p\vee a)\wedge(q\vee b)=(p\wedge q)\vee(p\wedge b)\vee(q\wedge a)\vee(a\wedge b)\in P.$$

这与 $P\cap F=\Phi$ 相矛盾，故 P 确为一素理想. ∎

推论 4. 设 L 是分配格, $I\in I(L)$, $a\in L$. 如有 $a\bar{\in}I$, 则必有素理想 $P\supseteq I$ 使得仍有 $a\bar{\in}P$.

证明. 只要在定理 3 中取 $F=[a)$ 即可. ∎

推论 5. 设 L 是分配格, $a,b\in L$, $a\neq b$, 则必有素理想 P 恰只包含 a,b 二元之一.

证明. 因为 $a\neq b$ 时, $(a]\cap[b)=\Phi$ 或 $(b]\cap[a)=\Phi$ 总有一个成立. ∎

定理 6. 格 L 是分配格的充要条件是 L 与一个集环同构.

证明. 只有必要性需要证明. 用$\mathcal{P}(L)$记 L 的全体素理想作成的集,按集包含关系它是一个偏序集. 对 $a\,\varepsilon\,L$,令

$$r(a)=\{P\,\varepsilon\,\mathcal{P}(L)\mid a\,\bar{\varepsilon}\,P\}.$$

容易验证对任意 $a,b\,\varepsilon\,L$ 有

$$r(a\vee b)=r(a)\cup r(b),\quad r(a\wedge b)=r(a)\cap r(b).$$

以后一等式为例,$r(a\wedge b)\subseteq r(a)\cap r(b)$显然成立,设 $P\,\varepsilon\,r(a)\cap r(b)$,有 $a\,\bar{\varepsilon}\,P,b\,\bar{\varepsilon}\,P$,由于 P 是素理想,也有 $a\wedge b\,\bar{\varepsilon}\ \varepsilon P$,即 $P\,\varepsilon\,r(a\wedge b)$,故相反的包含关系也成立,即 $r(a\wedge b)=r(a)\cap r(b)$. 令 $R=\{r(a)\mid a\,\varepsilon\,L\}$.

上述等式说明 R 为一集环. 我们证明 $a\rightarrow r(a)$是 L 到 R 的同构. 映射显然是满的,由上述等式它还是一个同态. 设 $a,b\,\varepsilon\,L$ 有 $a\neq b$,由推论 5 有 $P\,\varepsilon\,\mathcal{P}(L)$恰只包含 a,b 之一. 为确定计,设有 $a\,\varepsilon\,P,b\,\bar{\varepsilon}\,P$,于是有 $P\,\bar{\varepsilon}\,r(a)$但 $P\,\varepsilon\,r(b)$,故 $r(a)\neq r(b)$,即映射还是单的,从而它是一个同构. 】

定理 7. 格 L 是 Boole 格的充要条件是 L 与一个集域同构.

证明 仍然只需证明必要性. 设 L 是 Boole 格,记 $a\,\varepsilon\,L$ 的补元为 a',由于

$r(a)\cup r(a')=r(a\vee a')=r(1)=\mathcal{P}(L)$,

$r(a)\cap r(a')=r(a\wedge a')=r(0)=\Phi$,

$r(a)$与 $r(a')$在 R 中互补($\mathcal{P}(L)$和 Φ 显然分别是 R的单位元和零元). 这说明 R是一个集域,并且 $r(a)$在$\mathcal{P}$中的补元就是 $r(a')$. 前面已知 $a\rightarrow r(a)$保持格运算,现在又知道它保持补运算,故它是一个 Boole 格的同构. 】

定理 6 和定理 7 是一种所谓表示定理. 用更为基本和容易掌握的集环和集域来表示分配格和 Boole 格,不只是使我们对复杂的概念可以有更直观的了解,它事实上往往使我

们能更深入地探讨原来概念的许多性质,下面是一个很典型的例.

定理 8. 设 L 为一分配格,$|L|>1$,则格等式 $p=q$ 在 L 上成立的充要条件是它在二元链 C_2 上成立.

证明. 由于 $|L|>1$,C_2 是 L 的子格,当 $p=q$ 在 L 上成立时,由定理 I.5.3 知道,它也在 C_2 上成立. 反过来,如已知 $p=q$ 在 $C_2=\{0,1\}$ 上成立. 由于对任意集 S,幂集 P(S) 作为一个格易知与直积 $C_2^S=\{f \mid f: S\to C_2\}$ 同构,这里 $A\subseteq S$ 对应于 $f_A \varepsilon C_2^S$,其它义为

$$f_A(x)=\begin{cases}1 & (x \varepsilon A),\\ 0 & (x \bar{\varepsilon} A).\end{cases}$$

由定理 I.5.3 知道,对任意 S,$p=q$ 在 P(S) 上成立,从而也在 P(S) 的任何子格上成立. 我们已知 $L\cong \mathcal{R}$ 而 $\mathcal{R}$ 是 $P(\mathcal{P}(L))$ 的子格,故 $p=q$ 在 L 上成立. 】

定理 9. 有界分配格 L 是 Boole 格的充要条件是 $\mathcal{P}(L)$ 无序.

证明. 不妨设 $0\neq 1$.

设 L 是 Boole 格,又 P、$Q \varepsilon \mathcal{P}(L)$,$P\neq Q$. 如果有 $P\subset Q$,则有元 $a \varepsilon Q-P$. 由于 $a\vee a'=1 \bar{\varepsilon} Q$,有 $a' \bar{\varepsilon} Q$. 于是更有 $a' \bar{\varepsilon}$ εP. 但这不可能,因 $0=a\wedge a' \varepsilon P$ 而 P 是素理想. 故 $\mathcal{P}(L)$ 无序.

反过来,设 $\mathcal{P}(L)$ 无序但有元 $a \varepsilon L$ 无补元,令 $F=\{x \varepsilon L \mid a\vee x=1\}$,F 显然不空. 由于 L 是分配格,F 是一个滤子,由于 a 无补元,$a\neq 1$,$a \bar{\varepsilon} F$. 考虑 $F_1=F\vee[a)=\{x \varepsilon L \mid x\geqslant f\wedge a, f \varepsilon F\}$. F_1 不能含 0,因为否则有 $f \varepsilon F$

使 $\Gamma \wedge a = 0$. 连同 $\Gamma \vee a = 1$ 表明 Γ 是 a 的补元，这不可能． 于是对 $I = (0]$ 用 Stone 引理推知．有素理想 P 使 $P \cap F_1 = \Phi$, 当然更有 $P \cap F = \Phi$. 考虑理想 $P \vee (a]$. 它不可能包含 1, 因为否则有 $p \varepsilon P$ 使 $a \vee p = 1$ 而与 $P \cap F = \Phi$ 矛盾． 再对 $P \vee (a]$ 和 [1) 用 Stone 引理，有素理想 Q $\supseteq P \vee (a]$. 由于 $a \bar{\varepsilon} P$, 严格包含关系 $P \subset Q$ 与 $\mathcal{P}(L)$ 无序的假定矛盾． 故 a 不能无补元． 】

定理 10. 有界分配格 L 是 Boole 格的充要条件是素理想都是极大理想.

这里理想 $I \varepsilon I(L)$ 称为 L 的极大理想,是说 I 是 L 的真理想,但真包含它的理想都不再是真理想,就是说,对任意 $J \varepsilon I(L)$,只要 $J \supset I$,就有 $J = L$.

定理 10 的证明. 根据定理 9 充分性显然. 对于必要性. 如有素理想 P 不是极大理想,有真理想 $I \supset P$. 按 Stone 引理又有素理想 $Q \supseteq I$. 这不可能. 】

定理 11. 对于 Boole 格,素理想与极大理想是等同的 】

§3. 同余关系

我们已知任意格 L 的同余关系格 $C(L)$是完备格,现在我们进一步证明

定理 1. 对任意格 L,$C(L)$是分配格.

证明． 考虑任意元 θ、φ、$\psi \varepsilon C(L)$, 我们来证明 $\theta \wedge (\varphi \vee \psi) \leqslant (\theta \wedge \varphi) \vee (\theta \wedge \psi)$, 即对任意 $a, b \varepsilon L$, 从 $a \equiv b(\theta \wedge (\varphi \vee \psi))$ 应能推出 $a \equiv b((\theta \wedge \varphi) \vee (\theta \wedge \psi))$. 事实

∴ 由 $a\equiv b(\theta\wedge(\varphi\vee\psi))$ 知道 $a\equiv b(\theta)$ 并且 $a\equiv b(\varphi\vee\psi)$. 根据定理 Ⅰ.4.8, 由后一同余式有元序列 $a\vee b=c_1\geqslant\cdots\geqslant c_n=a\wedge b$ 使得对一切 $i=1,\cdots,n-1$, 有 $c_i\equiv c_{i+1}(\varphi)$ 或 $c_i\equiv c_{i+1}(\psi)$, 又由定理 Ⅰ.4.3 知道现在有 $a\vee b\equiv a\wedge b(\theta)$, 从而对一切 $i=1,\cdots,n-1$, 也有 $c_i\equiv c_{i+1}(\theta)$. 这说明或者 $c_i\equiv c_{i+1}(\theta\wedge\varphi)$ 或者 $c_i\equiv c_{i+1}(\theta\wedge\psi)$ 就是说 $a\equiv b((\theta\wedge\varphi)\vee(\theta\wedge\psi))$. ▌

对格 L,a,b ε L,我们已知

$$\theta(a,b)=\wedge\{\varphi\ \varepsilon\ C(L)\mid a\equiv b(\varphi)\},$$

是使得 a 与 b 同余的最小的同余关系. 它总存在(因为总有 $a\equiv b(\iota)$ 和 $\omega\leqslant\theta$),并被称作是一个主同余关系. 今后有时我们也说它是凝缩 a,b 的主同余关系. 下面是一个更一般的概念.

定义 2. 对任意非空子集 $S\subseteq L\times L$,我们用 $\theta(S)$记使得对一切$(a,b)\ \varepsilon\ S$ 都使得 a 与 b 同余的最小同余关系,称为由**集 S 生成的同余关系**,也说成是**凝缩 S 的同余关系**. 主同余关系 $\theta(a,b)$是单元集$\{(a,b)\}$生成的同余关系. 由于显然有

$$\theta(S)=\vee\{\theta(a,b)\mid(a,b)\ \varepsilon\ S\},$$

故 $\theta(S)$也总是存在的.

特别当 $S=I\times I, I\ \varepsilon\ I(L)$时,我们简记 $\theta(I\times I)$为 $\theta(I)$.

定理 3. 设 L 是分配格,$a,b,x,y\ \varepsilon\ L$,又 $a\leqslant b$,则我们有 $x\equiv y(\theta(a,b))\Leftrightarrow x\wedge a=y\wedge a,\ x\vee b=y\vee b$.

证明. 在 L 上定义一个二元关系 φ 如下: 对 $x,y\ \varepsilon\ L$,

$$x\equiv y(\varphi)\Leftrightarrow x\wedge a=y\wedge a, x\vee b=y\vee b.$$

φ 显然是一个等价关系. 设有 $x\equiv y(\varphi)$又 $z\ \varepsilon\ L$,我们有

$$(x\vee z)\wedge a=(x\wedge a)\vee(z\wedge a)=(y\wedge a)\vee(z\wedge a)$$
$$=(y\vee z)\wedge a,$$

$$(x\vee z)\vee b=(x\vee b)\vee z=(y\vee b)\vee z=(y\vee z)\vee b.$$

即 $x\vee z\equiv y\vee z(\varphi)$,同样可证 $x\wedge z\equiv y\wedge z(\varphi)$. 故 φ 是一个同余关系. 由于 $a\leqslant b$,$a\equiv b(\varphi)$明显成立. 我们来证明对任意 $\theta\in C(L)$,只要有 $a\equiv b(\theta)$就有 $\varphi\leqslant\theta$,换句话说,φ 是使 a 与 b 同余的最小同余关系,也就是 $\varphi=\theta(a,b)$

现在设 $x,y\in L$ 有 $x\equiv y(\varphi)$,按定义有 $x\wedge a=y\wedge a$,$x\vee b=y\vee b$. 如果 $\theta\in C(L)$满足条件 $a\equiv b(\theta)$,则 $x\vee a\equiv x\vee b(\theta)$,$x\wedge a\equiv x\wedge b(\theta)$. 直接进行计算得到

$$\begin{aligned}x&=x\vee(x\wedge a)=x\vee(y\wedge a)=(x\vee y)\wedge(x\vee a)\\&\equiv(x\vee y)\wedge(x\vee b)=(x\vee y)\wedge(y\vee b)\\&=y\vee(x\wedge b)\equiv y\vee(x\wedge a)=y\vee(y\wedge a)=y(\theta).\end{aligned}$$

故有 $\varphi\leqslant\theta$. ▌

定理 4. 设 L 是分配格,$I\in I(L)$,则我们有: $x\equiv y(\theta(I))\Leftrightarrow$ 有 $i\in I$ 使得 $x\vee y=(x\wedge y)\vee i$.

证明. 先证充分性,设已知 $x\vee y=(x\wedge y)\vee i$,$i\in I$. 在定理 3 中取 $a=x\wedge y\wedge i$,$b=i$,x,y 分别取现在的 $x\vee y$ 和 $x\wedge y$. 容易验证定理的条件满足,故有 $x\vee y\equiv x\wedge y(\theta(x\wedge y\wedge i,i))$,即 $x\equiv y(\theta(x\wedge y\wedge i,i))$. 由于 $x\wedge y\wedge i,i\in I$,$x\equiv y(I(\theta))$.

反过来,设已知 $x\equiv y(I(\theta))$. 由于 $\theta(I)=\bigwedge\{\theta(u,v)\mid u,v\in I\}$,又 $\theta(u,v)\vee\theta(u_1,v_1)\leqslant\theta(u\wedge v\wedge u_1\wedge v_1,u\vee v\vee u_1\vee v_1)$. 按同余关系格中并的定义,显见 $\theta(I)=\bigcup\{\theta(u,v)\mid u,v\in I\}$. 因此,当 $x\equiv y(I(\theta))$时,有 $u,v\in I$ 使 $x\equiv y(\theta(u,v))$. 这里我们不妨设 $u\leqslant v$,根据定理 3 有$(x\wedge y)\vee v=(x\vee y)\vee v$,从而 $x\vee y=(x\vee y)\wedge((x\vee y)\vee v)=(x\vee y)\wedge((x\wedge y)\vee v)=(x\wedge y)\vee((x\vee y)\wedge v)$. 由于$(x\vee y)\wedge v\in I$,我们得到 $x\vee y=(x\wedge y)\vee i$,这里 $i=(x\vee y)\wedge v$. ▌

由定理 4 我们得到分配格的下述刻划.

定理 5. **格 L 是分配格的充要条件是它的每个理想 I 都恰好是某个同余关系中的一个完整的同余类.**

证明. 设 L 是分配格,I ε I(L)是 L 的任意一个理想. 任取 a ε I,对任意 b ε I,按定义有 $a \equiv b(\theta(I))$. 这说明 $I \subseteq a\theta(I)$. 反过来,设 c ε $a\theta(I)$. 有 $c \equiv a(\theta(I))$. 根据定理 4,有 i ε I 使 $a \vee c = (a \wedge c) \vee i$. 这说明 $a \vee c$ ε I,更有 c ε I,即又有 $a\theta(I) \subseteq I$,故 $I = a\theta(I)$是一个完整的同余类.

反过来,如果 L 的每个理想都恰好是某个同余关系的完整的同余类,则 L 必为一分配格.因为否则 L 将包含一个五边形$\mathfrak{N}_5$ 或一个菱形$\mathfrak{M}_3$. 不难验证,不管那种情形,主理想(b]对任何同余关系都不可能是一个完整的同余类. ▌

对于 Boole 格,我们可以在同余关系和理想之间找到更密切的关系.

定理 6. **对于 Boole 格 L,映射**

$$\theta \to 0\theta$$

是 L 的同余关系和理想之间的一个一一对应关系.

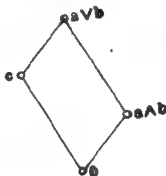


图 35

证明. 根据定理 5,对每个 I ε I(L)有 $I = a\theta(I)$,这里 a ε I

是 I 中任意元．由于 L 是 Boole 格它有 0，又任意 $I \varepsilon I(L)$ 都含有 0，故有 $I=0\theta(I)$，即映射是满射．现在设 $\theta,\varphi \varepsilon C(L)$ 有 $0\theta=0\varphi$，我们来证明有 $\theta=\varphi$．事实上，对任意 $a,b \varepsilon L$，$a\equiv b(\theta) \Leftrightarrow a\vee b\equiv a\wedge b(\theta)$．令 c 为 $a\wedge b$ 在区间 $[0,a\vee b]$ 上的相对补元．由相似关系有 $c\equiv 0(\theta)$（图 35），即 $c \varepsilon 0\theta$．同理 $a\equiv b(\varphi)$ 的充要条件也是 $c \varepsilon 0\varphi$．但 $0\theta=0\varphi$，故有 $a\equiv b(\theta) \Leftrightarrow a\equiv b(\varphi)$，即 $\theta=\varphi$，于是映射又是单的．】

读者会注意到上面的证明并未用到 L 是 Boole 格的全部条件，用到的只是 L 是分配格并且在每个区间 $[0,a\vee b]$ 上相对有补，这导致下述定义．

定义 7. 截段有补的分配格称为**广义 Boole 格**.

我们有以下令人满意的结果．

定理 8. **设 L 是格．在 L 的理想与同余关系间存在着一对一的（使得对应于同余关系 θ 的理想恰好是一个完整的同余类的）对应关系的充要条件是 L 是一个广义 Boole 格．**

证明. 充分性已见定理 6 的证明．

现在设所说的那种一一对应关系存在．对应于同余关系 ω 的是一个单元集 $\{a\}$，$a \varepsilon L$．由于 $\{a\}$ 是理想，不可能有 $b \varepsilon L$ 使 $b<a$．也不可能有 $b \varepsilon L$ 与 a 不可比，因为否则 $a\wedge b<a$．故对一切 $b \varepsilon L$ 都有 $b\geqslant a$，就是说 $a=0$ 是 L 的最小元．由定理 5，L 是分配格．还需要证明的是 L 是截段有补的．为此，任取非零元 $b \varepsilon L$．考虑满足条件 $0<a<b$ 的任一元 a．令 $I=0\theta(a,b)$．在定理 6 的证明中，我们已知总有 $I=0\theta(I)$．由于对应关系是一对一的，我们有 $\theta(I)=\theta(a,b)$．于是有 $a\equiv b(\theta(I))$．根据定理 4，有 $i \varepsilon I$ 使 $b=a\vee i$．由于 $i\equiv 0(\theta(I))$ 即 $i\equiv 0(\theta(a,b))$，根据定理 3 有 $a\wedge i=a\wedge 0=0$ 并且 i 是 a 在 $[0,b]$ 上的补元．从而 L 是一个广义 Boole 格．】

在§2中,我们已经看到素理想在分配格(包括 Boole 格)的表示定理中起着重要作用. 现在我们来看它怎样通过同余关系用另一种形式来刻划分配格.

关于素理想和同余关系的关系,我们在定理 I.3.14(i)中实际上已经接触到了. 在那里我们证得,$P \in I(L)$ 是 L 的一个素理想的充要条件是存在一个满同态 φ: $L \to C_2 = \{0,1\}$ 使得 $P = \varphi^{-1}(0)$. 由于每个这种同态 φ 都确定 L 的一个同余关系 θ_φ:

$$a \equiv b(\theta_\varphi) \Leftrightarrow \varphi(a) = \varphi(b), \qquad (a,b \in L).$$

于是在同余关系 θ_φ 中,P 和 L－P 正好是它的仅有的两个同余类. 不难看出,以上结论可作如下推广:设 $A \subseteq \mathcal{P}(L)$ 是一个素理想集,我们规定二元关系 θ_A 如次: $a,b \in L, a \equiv b(\theta_A) \Leftrightarrow$ 对每个 $P \in A$,或者 $a,b \in P$ 或者 $a,b \in L - P$. 作为练习,读者不难证明 θ_A 是 L 的同余关系. 在图 36 中,$A = \{P,Q,R\}$ 由三个元(素理想)组成;其中 $P \subset R, Q \subset R$. 我们得到五个同余类. 商格 L/θ_A 的 Hasse 图见图 6.

我们已知对任意 $A \subseteq \mathcal{P}(L), \theta_A \in C(A)$. 问题是,是否每个 $\theta \in C(L)$ 都有一个 $A \subseteq \mathcal{P}(L)$ 使得 $\theta = \theta_A$ 呢? 人们发现这恰好是 L 为一分配格的特征. 就是说我们有

定理 9. 格 L 是分配格的充要条件是对每个同余关系 $\theta \in C(L)$,都有子集 $A \subseteq \mathcal{P}(L)$,使得 $\theta = \theta_A$.

实际上,我们可以证明比定理 9 更广的下述定理 11. 在叙述定理 11 之前,我们先提一下要用到的一个事实.

引理 10. 设 L 是格,$P \in \mathcal{P}(L)$. 对任意 $a,b,c \in L$,有 $a \vee (b \wedge c) \in P \Leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c) \in P$. (留作练题请读者证

明） ▮

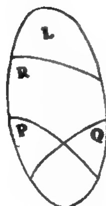


图 36

定理 11. 设 L 是格，$\theta \in C(L)$. 有 $A \subseteq \mathcal{P}(L)$ 使得 $\theta = \theta_A$ 的充要条件是商格 L/θ 是一个分配格.

证明. 先证必要性. 考虑 L/θ 中任意三个元 $a\theta, b\theta, c\theta$, 这里 $a,b,c \in L$. 我们要证 $(a\vee(b\wedge c))\theta = ((a\vee b)\wedge(a\vee c))\theta$. 设 $\theta=\theta_A, A\subseteq\mathcal{P}(L)$. 根据引理 10, 对任意 $P\in A$, 我们有 $a\vee(b\wedge c)$ 和 $(a\vee b)\wedge(a\vee c)$ 或者同属 P，或者同属 $L-P$. 就是说 $a\vee(b\wedge c) \equiv (a\vee b)\wedge(a\vee c)(\theta_A)$. 但 $\theta_A=\theta$, 这就证明了 L/θ 的分配性.

对于充分性,设已知 L/θ 是一个分配格.

令 $A=\{\eta^{-1}(Q) \mid Q\in\mathcal{P}(L/\theta)\}$, 这里 η: $L\to L/\theta$ 是自然同态. 很明显, $A\subseteq\mathcal{P}(L)$. 当 $a\equiv b(\theta)$ 时，我们有 $a\theta=b\theta$. 于是对每个 $Q\in\mathcal{P}(L/\theta)$, 或者 $a\theta=b\theta\in Q$ 或者 $\bar{\in} Q$. 也就是说对每个 $P=\eta^{-1}(Q)\in A$, 或者 $a,b\in P$ 或者 $a,b\ \bar{\in}\ p$. 从而 $a\equiv b(\theta_A)$. 故我们有 $\theta\leqslant\theta_A$. 反过来，

如果 $a \not\equiv b(\theta)$，则 $a\theta \neq b\theta$ 是分配格 L/θ 中两个不同元，根据推论 2.5，存在素理想 $Q \in \mathcal{P}(L/\theta)$ 包含而且只包含 $a\theta, b\theta$ 之一．为确定计我们设 $a\theta \in Q, b\theta \bar{\in} Q$．于是有 $a \in P = \eta^{-1}(Q)$，但 $b \bar{\in} P$，故有 $a \not\equiv b(\theta_A)$，即 $\theta_A \leq \theta$，从而 $\theta = \theta_A$．充分性于是得证．】

定理 9 的证明 如果格 L 是分配格，显然对一切 $\theta \in C(L)$，商格 L/θ 都是分配格．根据定理 11，有 $A \subseteq \mathcal{P}(L)$ 使 $\theta = \theta_A$．

反过来，如果每个 $\theta \in C(L)$ 都是一个 $\theta_A, A \subseteq \mathcal{P}(L)$，则同余关系 ω 也是．于是由定理 11，$L \cong L/\omega$ 是分配格．】

作为本节的结束，我们用定理 9 来证明一个关于同余关系扩张的定理．

定理 12．设 K 是分配格 L 的一个子格，θ 是 K 的一个同余关系．θ 总可以扩张成 L 的一个同余关系．就是说，有 $\varphi \in C(L)$ 使得对任意 $a, b \in K$ 有

$$a \equiv b(\varphi) \Leftrightarrow a \equiv b(\theta).$$

证明． 根据定理 9，$\theta = \theta_A$，这里 $A \subseteq \mathcal{P}(K)$ 是 K 的一个素理想集．对每个 $Q \in A$，考虑 L 的理想 $(Q]$ 和漏斗 $[K - Q)$．由于 Q 是素理想，不难知道有 $(Q] \cap [K - Q) = \Phi$．从而由 Stone 引理有 $P = P(Q) \in \mathcal{P}(L)$ 使 $P \supseteq (Q]$ 又 $P \cap [K - Q) = \Phi$．

令 $A' = \{P = P(Q) \mid Q \in A\}$，有 $A' \subseteq \mathcal{P}(L)$．令 $\varphi = \theta_{A'} \in C(L)$．对任意 $a, b \in K$，当 $a \equiv b(\theta)$ 时，对一切 $Q \in A$，有 $a, b \in Q$ 或 $a, b \in K - Q$，从而 $a, b \in P = P(Q)$ 或 $a, b \in L - P$，即 $a \equiv b(\varphi)$．反过来，当 $a, b \in K, a \equiv b(\varphi)$

时，对每个 $P = P(Q) \varepsilon A'$ 有 $a,b \varepsilon P$ 或 $a,b \varepsilon L - P$　于是 $a,b \varepsilon Q$ 或 $a,b \varepsilon K - Q$，即又有 $a \equiv b(\theta)$. 】

§4. 分配格的拓扑表示

设 L 是分配格，对任意 $a \varepsilon L$，我们曾定义了一个素理想集 $r(a) = \{P \varepsilon \mathcal{P}(L) \mid a \bar{\varepsilon} P\}$ 并证明了映射 $a \to r(a)$ 是从 L 到集环 $R = \{r(a) \mid a \varepsilon L\}$ 的一个格同构（定理2.6). M.H.Stone 发现，可以在素理想集 $\mathcal{P}(L)$ 上引进一个拓扑，使之成为一个拓扑空间（现在人们就把这个空间称为格 L 的 Stone 空间），这个拓扑空间可以更好地刻画格 L.

首先，我们注意到有以下事实：$\bigcup R = \bigcup\{r(a) \mid a \varepsilon L\} = \mathcal{P}(L)$. 事实上，对任意 $P \varepsilon \mathcal{P}(L)$，由于 P 是真理想，有 $a \varepsilon L, a \bar{\varepsilon} P$. 这说明 $P \varepsilon r(a) \subseteq \bigcup R$. 因此，我们可以用 R 作为子基在 $\mathcal{P}(L)$ 中引进一个拓扑结构.

定义 1. 在素理想集 $\mathcal{P}(L)$ 上以 $R = \{r(a) \mid a \varepsilon L\}$ 为子基引入一个拓扑 $\mathcal{T}$ 使 $\mathcal{S}(L) = (\mathcal{P}(L), \mathcal{T})$ 成为一个拓扑空间，称为格 L 的 Stone 空间.

Stone 空间的第一个基本性质是

定理 2. 对任意 $I \varepsilon I(L)$，令

$$r(I) = \{P \varepsilon \mathcal{P}(L) \mid I \nsubseteq P\},$$

则 $r(I)$ 是 Stone 空间 $\mathcal{S}(L)$ 的一个开集. 不仅如此，$I(L)$ 的每个开集都可以唯一的表示成 $r(I)$ 的形式，其中 $I \varepsilon I(L)$.

证明. 我们先注意到有以下关系式成立:

(i) $r(\mathrm{I})\cap r(\mathrm{J})=r(\mathrm{I}\wedge \mathrm{J})$

(ii) $r(\bigvee\{\mathrm{I}_\lambda;\lambda\varepsilon\Lambda\})=\bigcup\{r(\mathrm{I}_\lambda);\lambda\varepsilon\Lambda\}$.

(iii) $r((\mathrm{a}])=r(\mathrm{a})$.

这里I,J,$\mathrm{I}_\lambda(\lambda\varepsilon\Lambda)$都是L的理想,a ε L. 首先,(iii)成立显然. 对于(i),$r(\mathrm{I}\wedge\mathrm{J})\subseteq r(\mathrm{I})\cap r(\mathrm{J})$明显成立. 对任意P ε $r(\mathrm{I})\cap r(\mathrm{J})$, 有$\mathrm{I}\subsetneq \mathrm{P}$,$\mathrm{J}\subsetneq\mathrm{P}$, 于是有i ε I,j ε J使i,j $\bar{\varepsilon}$ P. 从而有i∧j $\bar{\varepsilon}$ P. 但i∧j ε I∧J,故$\mathrm{I}\wedge\mathrm{J}\subsetneq\mathrm{P}$,即P ε (I∧J),故(i)成立. 对于(ii),左端包含右端是明显的. 如果对一切λ ε Λ都有$\mathrm{I}_\lambda\subseteq\mathrm{P}$,则也有$\bigvee\{\mathrm{I}_\lambda;\lambda\varepsilon\Lambda\}\subseteq\mathrm{P}$.故(ii)式右端也包含左端,即(ii)也成立.

由于对任何I ε I(L)都有$\mathrm{I}=\bigvee\{(\mathrm{a}]\mid \mathrm{a}\varepsilon\mathrm{I}\}$, (i)(iii)式成立说明从$R=\{r(\mathrm{a})\mid \mathrm{a}\varepsilon\mathrm{I}\}$出发经有限交和任意并得到的恰好是全部$r(\mathrm{I})$. 这就说明$\{r(\mathrm{I})\mid\mathrm{I}\varepsilon I(\mathrm{L})\}$正好是$\mathscr{S}(\mathrm{L})$的开集族. 剩下还需证明的就是开集的表达形式$r(\mathrm{I})$唯一这一点了. 事实上,我们显然有a ε I ⇔ $r(\mathrm{a})\subseteq r(\mathrm{I})$. 故当$r(\mathrm{I})=r(\mathrm{J})$时,有

a ε I ⇔ $r(\mathrm{a})\subseteq r(\mathrm{I})=r(\mathrm{J})$ ⇔ a ε J, 即I=J. ▌

定理3. (i) $r(\mathrm{a})$**是**$\mathscr{S}(\mathrm{L})$**仅有的紧开集.**

(ii) $R=\{r(\mathrm{a})\mid\mathrm{a}\varepsilon\mathrm{L}\}$**是**$\mathscr{S}(\mathrm{L})$**的开集基.**

证明. 先证明$r(\mathrm{a})$是紧集. 设$\{r(\mathrm{I}_\lambda)\mid\lambda\varepsilon\Lambda\}$是$r(\mathrm{a})$的一个开复盖,我们有$r(\mathrm{a})\subseteq\bigcup\{r(\mathrm{I}_\lambda)\mid\lambda\varepsilon\Lambda\}=r(\bigvee\{\mathrm{I}_\lambda\mid\lambda\varepsilon\Lambda\})$,从而有a ε $\bigvee\{\mathrm{I}_\lambda\mid\lambda\varepsilon\Lambda\}$. 按定义有有限子集$\Lambda_0\subseteq\Lambda$使a ε $\bigvee\{\mathrm{I}_\lambda\mid\lambda\varepsilon\Lambda_0\}$, 于是有$r(\mathrm{a})\subseteq\bigcup\{(\mathrm{I}_\lambda)\mid\lambda\varepsilon\Lambda_0\}$,即$r(\mathrm{a})$是紧集.

反过来,如果$r(\mathrm{I})$是开紧集. 由于$r(\mathrm{I})=\bigcup\{r(\mathrm{a})\mid\mathrm{a}\varepsilon\mathrm{I}\}$,有$\mathrm{a}_1,\cdots,\mathrm{a}_n$ ε I使$r(\mathrm{I})\subseteq\bigcup\{r(\mathrm{a}_i)\mid$ i

$=1,\cdots,n\} = r(\vee_{i=1}^{n} a_i) = r(a)$, 这里 $a = \vee_{i=1}^{n} a_i \varepsilon I$ 故 (i) 成立.

由于 $r(a) \cap r(b) = r(a \wedge b) \varepsilon \mathcal{R}$, (iii)也成立. ▌

由于 $a \to r(a)$ 是分配格 L 到集环 $\mathcal{R} = \{r(a) \mid a \varepsilon L\}$ 的同构, 而且 $\mathcal{R}$ 中的运算就是集合并与交运算. 因此如果格 L 与 L_1 有同胚的 Stone 空间 $\mathcal{S}(L)$ 与 $\mathcal{S}(L_1)$ 时, 也就有同构的集环 $\mathcal{R}$ 与 $\mathcal{R}_1$, 从而也就有 $L \cong L_1$. 故我们有

定理 4. **在同构的范围内, Stone 空间 (L) 完全确定了分配格 L.**

以上我们从分配格 L 的素理想集 $\mathcal{P}(L)$出发,得到 L 的 Stone 空间 $\mathcal{S}(L)$. $\mathcal{S}(L)$回过头来又在同构的范围内确定了 L. 这里 $\mathcal{S}(L)$的结构当然是依赖于 L 的结构的. 问题是 Stone 空间有没有一个纯拓扑的特征呢? 就是说,一个满足某些纯拓扑条件的拓扑空间一定是某个分配格的 Stone 空间. 这样的条件有没有呢? 如果有的话,我们就可以反过来从拓扑空间出发来得到分配格. 这是三十年代,M.H.Stone 对格论作出的一项重大贡献. 我们下面就来讨论这个问题. 不过我们还得考查 Stone 空间 $\mathcal{S}(L)$的某些进一步的性质.

定理 5. **对任意 $P \varepsilon \mathcal{P}(L)$, 在 $\mathcal{S}(L)$ 中有 $\overline{\{P\}} = \mathcal{S}(L) - r(P)$, 这里 $\overline{\{P\}}$ 是单元集 $\{P\}$ 的闭包.**

证明. 由闭包的定义知道, $Q \varepsilon \overline{\{P\}}$ 的充要条件是 Q 的每个邻域都包含 P. 由于 R 是基, 上述邻域可以限于 $r(a)$. 故有

$$\overline{\{P\}} = \{Q \varepsilon \mathcal{P}(L) \mid Q \varepsilon r(a) \Rightarrow P \varepsilon r(a)\}$$
$$= \{Q \varepsilon \mathcal{P}(L) \mid P \subseteq Q\} = \mathcal{S}(L)$$
$$- \{Q \varepsilon \mathcal{P}(L) \mid P \nsubseteq Q\} = \mathcal{S}(L) - r(P).$$

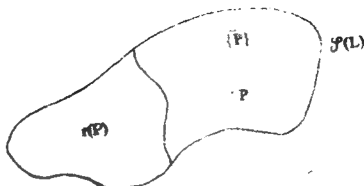


图 47

这里 $Q \varepsilon r(a) \Rightarrow P \varepsilon r(a)$ 等价：$P \subseteq Q$ 是因为当 $P \subseteq Q$ 时有 $a \bar{\varepsilon} Q \Rightarrow a \bar{\varepsilon} P$，而当 $P \nsubseteq Q$ 时，有 $a \varepsilon P - Q$，从而有 $Q \varepsilon r(a)$ 但 $P \bar{\varepsilon} r(a)$. 】

推论 6. 当 $P \neq Q$ 时有 $\{P\} \neq \{Q\}$，从而 $\mathscr{S}(L)$ 是一个 T_0 空间. 】

定理 7(Stone 定理). 分配格的 Stone 空间 $\mathscr{S}$ 的拓扑特征是：

(S1)$\mathscr{S}$ 是 T_0 空间，又它的全部紧开集作成一个开集基.

(S2)两个紧开集的交仍是紧开集.

(S3)设 A 是 $\mathscr{S}$ 的一个闭集，紧开集族 $\{U_\lambda \mid \lambda \varepsilon \Lambda\}$ 是一个对偶定向族，则当族中每个 U_λ 都有 $A \cap U_\lambda \neq \Phi$ 时，必有 $A \cap \bigcap \{U_\lambda \mid \lambda \varepsilon \Lambda\} \neq \Phi$. 这里子集族 $\{U_\lambda \mid \lambda \varepsilon \Lambda\}$ 称为对偶定向族的意思是对任意 $\lambda, \mu \varepsilon \Lambda$，总有 $\nu \varepsilon \Lambda$ 使 $U_\nu \subseteq U_\lambda \cap U_\mu$.

证明. 先设 $\mathscr{S} = \mathscr{S}(L)$ 是分配格 L 的 Stone 空间. 根据定理 3 及其证明和推论 6，(S1) 和 (S2) 成立.

对于 (S3)，设 $A = \mathscr{S}(L) - r(I)$，$I \varepsilon \mathscr{I}(L)$，又 $U_\lambda = r(a_\lambda)$，$\lambda \varepsilon \Lambda$，$a_\lambda \varepsilon L$. 于是 $A = \{P \varepsilon \mathscr{P}(L) \mid I \subseteq P\}$，$U_\lambda$

$=\{P \varepsilon \mathcal{P}(L) \mid a_\lambda \bar{\varepsilon} P\}$. 考虑 L 的子集 $F=\{x \varepsilon L \mid x \geqslant a_\lambda$. 对至少一个 $\lambda \varepsilon \Lambda$ 成立 $\}$. 由于 $\{U_\lambda \mid \lambda \varepsilon \Lambda\}$ 是对偶定向族，不难证明，F 是 L 的一个滤子． 条件 $A \cap U_\lambda \neq \Phi$ 说明 $a_\lambda \bar{\varepsilon} I$, 故有 $F \cap I=\Phi$, 根据 Stone 引理，有 $P \varepsilon \mathcal{P}(L)$ 使 $I \subseteq P, F \cap P=\Phi$. 于是对一切 $\lambda \varepsilon \Lambda$ 有 $a_\lambda \bar{\varepsilon} P$, 即 $P \varepsilon r(a_\lambda)=U_\lambda$. 又从 $I \subseteq P$ 知道 $P \varepsilon A$, 从而 $P \varepsilon A \cap \bigcap\{U_\lambda \mid \lambda \varepsilon \Lambda\}$, 于是 (S3) 成立. 条件的必要性得证.

现在设 $\mathcal{S}$ 是一个满足条件 (S1)－(S3) 的拓扑空间，我们来构造一个分配格 L 使得它的 Stone 空间 $\mathcal{S}(L)$ 就是 $\mathcal{S}$(在同胚的意义下). 为此，我们取 $\mathcal{S}$ 的全部紧开集作成 L. 由于有 (S2),L 作成一个集环，因而以集合并与交作为运算时是一个分配格. 需要证明的是：对于这个格 L 有 $\mathcal{S}(L) \cong \mathcal{S}$. 下面我们具体来构造它们之间的一个同构映射.

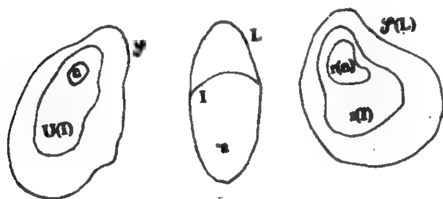


图38

我们先设法把 $\mathcal{S}$ 的开集和 L 的理想如下这样对应起来. 设 U 是 $\mathcal{S}$ 的开集. 由于 (S1), 有 $U=\bigcup\{a \varepsilon L \mid a$

$\subseteq U\}$，这里 $a \varepsilon L$ 意味着 a 是 $\mathscr{S}$ 的紧开集．很明显，$I(U) = \{a \varepsilon L \mid a \subseteq U\}$ 是 L 的一个理想．反过来，设 I 是 L 的一个理想，$U(I) = \bigcup\{a \varepsilon L \mid a \varepsilon I\}$ 是 $\mathscr{S}$ 的一个开集．很明显，我们有 $U = U(I(U)), I = I(U(I))$，故 $U \to I(U)$ 或 $I \to U(I)$ 是 $\mathscr{S}$ 的开集与 L 的理想之间的一一对应关系．

现在我们来构造一个从 $\mathscr{S}(L)$ 到 $\mathscr{S}$ 的同胚映射．对任意 $P \varepsilon \mathscr{P}(L)$，考虑 $\mathscr{S}$ 中的闭集 $\Lambda = \mathscr{S} - U(P)$．设与 Λ 有非空交的全部紧开集是 $U_\lambda, \lambda \varepsilon \Lambda$．由于 $\Phi \neq U_\lambda \cap \Lambda = U_\lambda \cap (\mathscr{S} - U(P))$，知道 $U_\lambda \subsetneq U(P)$．按 $U(P)$ 的定义，作为 L 的一个元，$U_\lambda \bar{\varepsilon} P$．对任意 $\mu \varepsilon \Lambda$，当然也有 $U_\mu \bar{\varepsilon} P$．由于 P 是素理想，又由 (S2)$U_\nu = U_\lambda \cap U_\mu$ 也是紧开集，从而有 $U_\nu \bar{\varepsilon} P$，即 $U_\nu \subsetneq U(P)$．故 $U_\nu \cap \Lambda \neq \Phi$．这就证明了 $\{U_\lambda \mid \lambda \varepsilon \Lambda\}$ 是一个对偶定向族．于是，由 (S3) 有 $\Lambda \cap \bigcap\{U_\lambda \mid \lambda \varepsilon \Lambda\} \neq \Phi$．我们来证明这个非空集是一个单点集．事实上，可以证明对任意点 $p \varepsilon \Lambda \cap \bigcap\{U_\lambda \mid \lambda \varepsilon \Lambda\}$ 都有 $\overline{\{p\}} = \Lambda$．因为对任意点 $q \varepsilon \Lambda$，如果 U 是包含 q 的一个紧开集，则有 $U \cap \Lambda \neq \Phi$，即 U 是某个 U_λ，从而有 $p \varepsilon U$，即 $q \varepsilon \overline{\{p\}}$．另一方面，如果有 $q \bar{\varepsilon} \Lambda$，则 $q \varepsilon \mathscr{S} - \Lambda$．由于 $p \bar{\varepsilon} \mathscr{S} - \Lambda$，得出 $q \bar{\varepsilon} \overline{\{p\}}$．故确有 $\overline{\{p\}} = \Lambda$．如果还有 $q \varepsilon \Lambda \cap \bigcap\{U_\lambda \mid \lambda \varepsilon \Lambda\}$，则 $\overline{\{q\}} = \Lambda = \overline{\{p\}}$，由 (S1) 知道 $q = p$．故 $\Lambda \cap \bigcap\{U_\lambda \mid \lambda \varepsilon \Lambda\} = \{p\}$ 为一个单点集．于是我们可以定义一个映射 φ: $\mathscr{S}(L) \to \mathscr{S}$，只要规定对 $P \varepsilon \mathscr{P}(L), \varphi(P) = p$，这里 p 就是刚才证明唯一存在的那个 p．我们来证明这个 φ 就是所要的同构映射．

先证明它是满射，对任意点 $p \varepsilon \mathscr{S}$，令 $I = I(\mathscr{S} - \overline{\{p\}})$

$=\{a\ \varepsilon\ L \mid a \subseteq \mathscr{S} - \{p\}\}$. I 显然是 L 的理想并有 $U(I) = \mathscr{S} - \{p\}$. 如果我们能证明 I 是 L 的素理想，则由于 $\mathscr{S} - U(I) = \{p\}$, 按定义就应有 $\varphi(I) = p$, 即 φ 是一个满射. 考虑 L 中两个元 U 和 V, 设有 $U\ \varepsilon\ I$ $V\ \varepsilon\ I$. 于是 $U \cap \{p\} \neq \Phi, V \cap \{p\} \neq \Phi$, 从而有 $p\ \varepsilon\ U, V$, 进而有 $p\ \varepsilon\ U \cap V$. 这说明 $(U \cap V)\ \bar{\varepsilon}\ I$, 即 I 确为一素理想.

由 φ 的定义，显见它是一个单射. 因此剩下要证明的就是，在 φ 的作用下，集 X 在 $\mathscr{S}(L)$ 中开的充要条件是 $\varphi(X)$ 在 $\mathscr{S}$ 中开. 由于 $\mathscr{S}(L)$ 中的全部开集是 $\{r(I) \mid I\ \varepsilon\ I(L)\}$, $\mathscr{S}$ 中的全部开集是 $\{U(I) \mid I\ \varepsilon\ I(L)\}$. 我们只需证明 $P\ \varepsilon\ r(I) \Leftrightarrow p = \varphi(P)\ \varepsilon\ U(I)$ 就行了. 事实上，

$$P\ \varepsilon\ r(I) \Leftrightarrow I \subsetneq P \Leftrightarrow U(I) \subsetneq U(P)$$

$$\Leftrightarrow U(I) \cap \{\mathscr{S} - U(P)) \neq \Phi$$

$$\Leftrightarrow U(I) \cap \{\bar{p}\} \neq \Phi \qquad (p = \varphi(p))$$

$$\Leftrightarrow p\ \varepsilon\ U(I).$$

定理于是全部证完. ▌

定理 8. Boole 格的 stone 空间 $\mathscr{S}$ 的拓扑特征是:

(B1) $\mathscr{S}$ 是紧致的Hausdorff空间.

(B2) 全体开闭集 (即既开又闭的子集) 做成 $\mathscr{S}$ 的开集基 (就是说 $\mathscr{S}$ 是一个完全不连通空间).

证明. 设 B 是一 Boole 格，又 $\mathscr{S} = \mathscr{S}(B)$. 由于 $\mathscr{S} = r(1)$, 故 $\mathscr{S}$ 是紧致的. 对任意元 $a\ \varepsilon\ B$, 记它的补元为 a'. 由于 $r(a)$ 与 $r(a')$ 在 $\mathscr{S}$ 中互补，$r(a)$ 是开闭集. 由定理 7,(B2) 成立. 设 $P, Q\ \varepsilon\ \mathscr{S} = \mathscr{S}(B)$, 又 $P \neq Q$. 不妨设 $P \subsetneq Q$. 任取 $a\ \varepsilon\ P - Q$, 于是有 $a'\ \varepsilon\ Q - P$. 从

而 $P \in r(a')$, $Q \in r(a)$, 但 $r(a) \cap r(a') = \Phi$, 故 $\mathscr{S}$ 为一 Hausdorff 空间，于是 (B1) 也成立．

反过来，设拓扑空间 $\mathscr{S}$ 紧致、Hausdorff 并且完全不连通． 由于 $\mathscr{S}$ 是紧致 Hausdorff 空间，它的紧开集和闭子集是等同的． 因而全体开闭集就是全体紧开集． 由于 $\mathscr{S}$ 完全不连通，条件 (S1),(S2) 对 $\mathscr{S}$ 成立． 对于 (S3), 由于现在 $\{A\} \cup \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 作成 $\mathscr{S}$ 中一个有有限交性质的闭集族，而 $\mathscr{S}$ 是紧致空间，自然有 $A \cap \bigcap\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \neq \Phi$, 即 (S3) 也成立． 于是由定理 7, $\mathscr{S}$ 是由它的全体开闭集作成的分配格的 Stone 空间，这个格显然还是个 Boole 格． 定理于是得证． 】

我们用 Stone 理论的下述有趣应用来作为本节的结束．

定理 9． 设 B 是一个无穷的 Boole 格，则总有 $|\mathscr{P}(B)| \geqslant |B|$.

证明． 记 $\mathscr{S} = \mathscr{S}(B)$, 它是一个完全不连同的紧致 Hausdorff 空间． 对 $a,b \in \mathscr{S}$, $a \neq b$, 我们选定一对开闭集 $U_{a,b}$ 和 $U_{b,a}$ 使得 $a \in U_{a,b}$, $b \in U_{b,a}$, $U_{a,b} \cap U_{b,a} = \Phi$. 现在设 U 是一个开闭集，又 $a \in U$. 我们有 $\mathscr{S} - U \subseteq \bigcup\{U_{b,a} \mid b \in \mathscr{S} - U\}$. 由于 $\mathscr{S} - U$ 的紧性，有有限子集 $N \subseteq \mathscr{S} - U$ 使得 $\mathscr{S} - U \subseteq \bigcup\{U_{b,a} \mid b \in N\}$. 令 $V_a = \bigcap\{U_{a,b} \mid b \in N\}$, 则 V_a 开并且有 $a \in V_a \subseteq U$. 于是又有 $U = \bigcup\{V_a \mid a \in U\}$. 再由 U 的紧性知道，有有限子集 $M \subseteq U$ 使得 $U = \bigcup\{V_a \mid a \in M\}$. 因此 $\mathscr{S}$ 的每个开闭集 U 都是 $U_{a,b}$ 的有限交的有限并． 因此 $\mathscr{S}$ 中开闭集的个数 $|B|$ 不多于 $\mathscr{S}$ 中元的有限序列的个数，而当 $\mathscr{S}$ 为无穷集

时，后者等于$|\mathscr{S}|=|\mathscr{P}(B)|$. 现在$\mathscr{S}$的确是一个无穷集，因为已知B无穷而B的元是$\mathscr{S}$中的开闭集，$\mathscr{S}$不可能有限. 】

注意本定理中Boole格B无穷这个条件是不能去掉的. 下面所示的Boole格B_2中，有$|\mathscr{P}(B_2)|=2$，但$|B|=4$，$|\mathscr{P}(B)|\geqslant|B|$不成立.

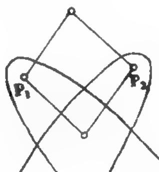


图 39

§5. 分配元、标准元与中性元

定义 1. 设L为任意格，$a\in L$.

(i) a称为L的一个**分配元**，如果对一切$x,y\in L$都有

$$a\vee(x\wedge y)=(a\vee x)\wedge(a\vee y),$$

(ii) a称为**标准元**，如果对一切$x,y\in L$有

$$x\wedge(a\vee y)=(x\wedge a)\vee(x\wedge y),$$

(iii) a称为一个**中性元**，如果对一切$x,y\in L$有

$$(a\wedge x)\vee(x\wedge y)\vee(y\wedge a)=(a\vee x)\wedge(x\vee y)\wedge(y\vee a).$$

在图33所示的格$\mathfrak{N}_5$中，u,v,a,c是分配元，但b不

是；u,v,a 是标准元，但 c 不是；只是 u 和 v.是中性元．在 $\mathfrak{M}_3$ 中，只有 u,v 是分配元，它们也是标准元和中性元．

很明显,格 L 是分配格的充要条件是它的每个元都是分配元、标准元和中性元.

对偶地,我们可以定义**对偶分配元**和**对偶标准元**. 没有对偶中性元,因为中性元的定义是自对偶的.

以下几个定理,给出了上述诸概念的若干等价描述.

定理 2. 设 L 是格，$a \in L$, 则以下条件等价:

(i) a是L的分配元,

(ii) 映射φ: $L \to [a)$,这里$\varphi(x) = a \vee x$,是一个满同态,

(iii) 定义L的二元关系θ_a如下:

$$x \equiv y(\theta_a) \Leftrightarrow a \vee x = a \vee y \quad (x,y \in L),$$

$\theta_a \in C(L)$是L的一个同余关系.

证明. (i) ⇒ (ii). φ 把 L 映射到 [a) 明显；由于对任意 $b \geqslant a$ 有 $\varphi(b) = b$, 所以 φ 是满的． φ 显然保持运算 ∨，它也保持 ∧，因为 a 是分配元． 故从 (i) 推出 (ii).

(ii) ⇒ (iii). 由于 φ: $L \to [a)$ 是一个满同态，由定理 Ⅰ.4.6 的证明知道，现在的 θ_a 就是那里的 θ_φ，而后者是 L 的一个同余关系．

(iii) ⇒ (i). 由于 $a \vee x = a \vee (a \vee x)$，有 $x \equiv a \vee x(\theta_a)$. 同样，有 $y \equiv a \vee y(\theta_a)$. 从而有 $x \wedge y \equiv (a \vee x) \wedge (a \vee y)(\theta_a)$. 按定义得到

$$a \vee (x \wedge y) = a \vee ((a \vee x) \wedge (a \vee y)) = (a \vee x) \wedge (a \vee y),$$

即a是分配元. 】

定理 3. 设 L 是格，$a \in L$, 则以下条件等价:

(i) a是L的标准元,

(ii) 如下定义的L的二元关系θ_a是L的一个同余关系:
$x \equiv y(\theta_a) \Leftrightarrow$ 存在 $a_1 \leqslant a$ 使 $x \vee y = (x \wedge y) \vee a_1$, 这里 $x, y \in L$,

(iii) a是分配元,并且对$x, y \in L$有

$a \wedge x = a \wedge y, a \vee x = a \vee y \Rightarrow x = y$.

证明. (i) ⇒ (ii). 设 a 是标准元, 又 θ_a 是 (ii) 中那样定义的一个二元关系, 我们验证它满足定理 Ⅰ.4.3 的全部条件. θ_a 是自反的, 因为 $x = x \vee (x \wedge a)$, 这里 $a_1 = x \wedge a \leqslant a$. 又按定义有 $x \equiv y(\theta_a) \Leftrightarrow x \vee y \equiv x \wedge y(\theta_a)$. 如果 $x \leqslant y \leqslant z$ 又 $x \equiv y(\theta_a), y \equiv z(\theta_a)$, 则 $y = x \vee a_1, z = y \vee a_2, a_1, a_2 \leqslant a$. 从而有 $z = x \vee (a_1 \vee a_2), a_1 \vee a_2 \leqslant a$, 即也有 $x \equiv z(\theta_a)$. 最后, 设 $x \leqslant y$, 又 $x \equiv y(\theta_a)$. 于是有 $a_1 \leqslant a$ 使 $y = x \vee a_1$. 对任意 $t \in L$ 有 $y \vee t = (x \vee t) \vee a_1$, 即有 $x \vee t \equiv y \vee t(\theta_a)$. 对交运算 ∧, 注意到 $y \wedge t \leqslant y = x \vee a_1 \leqslant x \vee a$, 由于 a 是标准元, 我们有

$$y \wedge t = (y \wedge t) \wedge (x \vee a)$$
$$= (y \wedge t \wedge x) \vee (y \wedge t \wedge a) = (x \wedge t) \vee a_1$$

这里 $a_1 = (y \wedge t) \wedge a \leqslant a$. 故有 $x \wedge y \equiv y \wedge t(\theta_a)$. 根据定理 Ⅰ.4.3, $\theta_a \in C(L)$ 是一个同余关系.

(ii) ⇒ (iii). 设已知 $\theta_a \in C(L)$, 按定义有 $x \equiv x \vee a(\theta_a), y \equiv y \vee a(\theta_a)$. 故对任意 $x, y \in L$, 有 $x \wedge y \equiv (a \vee x) \wedge (a \vee y)(\theta_a)$, 从而有 $a_1 \leqslant a$ 使 $(x \wedge y) \vee a_1 = (a \vee x) \wedge (a \vee y)$. 两端同并一个 a 就得出

$$a \vee (x \wedge y) = (a \vee x) \wedge (a \vee y).$$

即a是L的分配元.

现在设 $x, y \in L$ 有 $a \wedge x = a \wedge y, a \vee x = a \vee y$. 由于 $y \equiv a \vee y(\theta_a)$, 我们有 $x \wedge y \equiv x \wedge (a \vee y) = x \wedge (a \vee x)$

$=x(\theta_a)$. 于是有 $a_1 \leqslant a$ 使 $x=(x\wedge y)\vee a_1$. 由此知道 $a_1 \leqslant x$, 从而 $a_1 \leqslant a\wedge x = a\wedge y$. 但由此有 $a_1 \leqslant x\wedge y$, 从而得到 $x = x\wedge y$. 同理有 $y = x\wedge y$, 故 $x = y$,(iii) 于是成立.

(iii) ⇒ (i). 设已知(iii)成立,对任意 $x,y \in L$,令 $b = x\wedge(a\vee y)$, $c=(x\wedge a)\vee(x\wedge y)$,我们来证明 $b=c$. 为此我们只需证明有 $a\wedge b = a\wedge c$, $a\vee b = a\vee c$. 事实上

$$a\wedge x \leqslant a\wedge c \leqslant a\wedge b(\text{因为 } c \leqslant b)$$
$$= a\wedge x\wedge(a\vee y) = a\wedge x.$$

故有 $a\wedge b = a\wedge c$. 又由于 a 是分配元,我们还有

$$a\vee b = a\vee(x\wedge(a\vee y)) = (a\vee x)\wedge(a\vee y)$$
$$= a\vee(x\wedge y) = a\vee(x\wedge a)\vee(x\wedge y) = a\vee c \qquad]$$

定理 4. 设 L 是格, $a \in L$,则以下条件等价:

(i) a 是 L 的中性元,

(ii) a 是分配元和对偶分配元并且对 $x,y \in L$ 有

$$a\wedge x = a\wedge y,\ a\vee x = a\vee y \Rightarrow x = y,$$

(iii) 存在一个有 1 的格 A 和一个有 0 的格 B 和一个从 L 到 $A\times B$ 的嵌入映射 φ: $L\to A\times B$,使得 $\varphi(a)=(1,0)$.

(iv) 对任意 $x,y \in L$,由 a,x 和 y 三个元生成的 L 的子格是分配格.

证明. (i) ⇒ (ii). 当 a 是中性元时,对 $x,y \in L$. 我们有

$$x \geqslant a \Rightarrow a\vee(x\wedge y) = x\wedge(a\vee y).$$

事实上,当 $x \geqslant a$ 时,由于 a 是中性元,

$$a\vee(x\wedge y) = (a\wedge x)\vee(x\wedge y)\vee(a\wedge y)$$
$$= (a\vee x)\wedge(x\vee y)\wedge(a\vee y) = x\wedge(a\vee y).$$

利用上述关系式,对任意 $x,y \in L$,我们有

$$a\vee(x\wedge y) = a\vee(a\wedge x)\vee(x\wedge y)\vee(a\wedge y)$$

$$=a\vee((a\vee x)\wedge(x\vee y)\wedge(a\vee y))$$

$$=(a\vee x)\wedge(a\vee y)\wedge(a\vee x\vee y)=(a\vee x)\wedge(a\vee y).$$

故 a 是分配元. 对偶地,它也是对偶分配元.

现在设有 $a\wedge x=a\wedge y, a\vee x=a\vee y$. 我们直接计算得到

$$x=x\wedge(a\vee x)\wedge(x\vee y)\wedge(a\vee y)$$

$$=x\wedge((a\wedge x)\vee(x\wedge y)\vee(a\wedge y))$$

$$=x\wedge((a\wedge x)\vee(x\wedge y))=(a\wedge x)\vee(x\wedge y)$$

$$=(a\wedge x)\vee(x\wedge y)\vee(a\wedge y).$$

由于上式右端关于 x,y 是对称的,我们也有 $y=(a\wedge x)\vee(x\wedge y)\vee(a\wedge y)$,从而有 $x=y$.

(ii) ⇒ (iii). 设 (ii) 成立,我们令 $A=(a], B=[a)$. 并令 $\varphi(x)=(a\wedge x, a\vee x), x\in L, \varphi$ 是从 L 到 $A\times B$ 的一个映射. 由于 (ii) 成立,φ 显然是一个嵌入映射,并有 $\varphi(a)=(a,a)$, 这里 a 是格 $A=(a]$ 的最大元 1, 又是格 $B=[a)$ 的最小元 0.

(iii) ⇒ (iv). 我们注意到当 a 是格 L 的最大元 1 或最小元 0 时(当然是在 L 有最大元 1 或最小元 0 时),a,x,y 总生成分配格;又当 a,x,y 在 L 中生成分配子格时,对 L 的任意子格 L_1, 当 $a,x,y\in L_1$ 时,它们在 L_1 中也生成分配子格. 由 (iii) 我们知道 $\varphi(L)$ 是 $A\times B$ 的子格,并有 $\varphi(a)=(1,0)$. 令 $\varphi(x)=(x_1,x_2), \varphi(y)=(y_1,y_2)$. 由于 φ 是从 L 到 $\varphi(L)$ 的同构,a,x,y 在 L 中生成的子格,与 $(1,0),(x_1,x_2),(y_1,y_2)$ 在 $\varphi(L)$ 中生成的子格同构. 由于在 $A\times B$ 中格运算是按坐标进行的,后者生成分配格,故 (iv) 成立.

(iv) $\Rightarrow$ (i). 显然. 】

定理 5. (i) 中性元是标准元，标准元是分配元，

(ii) 同时是标准元和对偶标准(或分配)元的元是中性元.

(iii) 当 a 是分配元或是标准元时，定理 2(iii) 和定理 3(ii) 中定义的同余关系 $\theta_a = \theta((a])$.

证明. (i) 和 (ii) 是定理2,3,4 的直接推论.

对于 (iii), 先设 a 是分配元，很明显对任意 $x,y \varepsilon (a]$ 有 $a \vee x = a \vee y$, 即有 $x \equiv y(\theta_a)$, 故有 $\theta((a]) \leqslant \theta_a$. 设同余关系 $\theta \geqslant \theta((a])$, 则对任意 $\mu \leqslant a$ 有 $\mu \equiv a(\theta)$, 从而当 $x,y \varepsilon L$ 满足 $a \vee x = a \vee y$, 即 $x \equiv y(\theta_a)$ 时，有

$$x = x \vee (x \wedge a) \equiv x \vee a = y \vee a \equiv y \vee (y \wedge a) = y(\theta),$$

因为 $x \wedge a, y \wedge a \leqslant a$. 因此又有 $\theta_a \leqslant \theta$, 这说明 $\theta_a = \theta((a])$.

当 a 是标准元时，对任意 $x, y \varepsilon (a]$, 有 $x \vee y = (x \wedge y) \vee (x \vee y)$, 这里 $x \vee y \leqslant a$, 故有 $x \equiv y(\theta_a)$ 即 $\theta((a]) \leqslant \theta_a$. 仍然考虑同余关系 $\theta \geqslant \theta((a])$. 当 $x \equiv y(\theta_a)$, 即 $x \vee y = (x \wedge y) \vee a_1, a_1 \leqslant a$ 时，由于 $a \wedge x \wedge y, a_1 \varepsilon (a]$, 我们有

$$x \wedge y = (x \wedge y) \vee (a \wedge x \wedge y) \equiv (x \wedge y) \vee a_1 = x \vee y(\theta).$$

从而 $x \equiv y(\theta)$. 同上我们也得到 $\theta_a = \theta((a])$. 】

定理 6. 设 L 是格，则我们有

(i) L 的全体分配元作成一个并子半格 D(就是说当 $a,b \varepsilon D$ 时总有 $a \vee b \varepsilon D$),

(ii) 全体标准元作成一个子格 S; 全体中性元作成一个子格 N.

证明. (i) 设 $a,b \varepsilon D$, 由分配元定义得到

$$(a \vee b) \vee (x \wedge y) = a \vee ((b \vee x) \wedge (b \vee y))$$

$=((a\vee b)\vee x)\wedge((a\vee b)\vee y)$, 即 $a\vee b\in D$.

(ii)设 $a,b\in S$. 对并运算我们有

$$x\wedge(a\vee b\vee y)=(x\wedge a)\vee(x\wedge(b\vee y))$$
$$=(x\wedge a)\vee(x\wedge b)\vee(x\wedge y)=(x\wedge(a\vee b))\vee(x\wedge y),$$

这说明 $a\vee b\in S$. 对交运算,我们证明等式

$$\theta_{a\wedge b}=\theta_a\wedge\theta_b.$$

这里 θ_a,θ_b 和 $\theta_{a\wedge b}$ 是定理 3(ii) 中定义的二元关系. 由于 $a,b\in S,\theta_a,\theta_b\in C(L)$. 如果等式成立,则 $\theta_{a\wedge b}$ 也是同余关系,从而根据定理 3 有 $a\wedge b\in S$. 按定义,显然有 $\theta_{a\wedge b}\leqslant\theta_a\wedge\theta_b$. 因此,设有 $x\equiv y(\theta_a\wedge\theta_b)$. 由 $x\equiv y(\theta_a)$ 有 $a_1\leqslant a$ 使 $x\vee y=(x\wedge y)\vee a_1$, 于是 $a_1=a_1\wedge(x\vee y)\equiv a_1\wedge x\wedge y(\theta_b)$. 又有 $b_1\leqslant b$ 使 $a_1=(a_1\wedge x\wedge y)\vee b_1$. 从而得到 $(x\wedge y)\vee b_1=(x\wedge y)\vee(a_1\wedge x\wedge y)\vee b_1=(x\wedge y)\vee a_1=x\vee y$. 由于 $b_1\leqslant a\wedge b$, 有 $x\equiv y(\theta_{a\wedge b})$, 从而 $\theta_{a\wedge b}=\theta_a\wedge\theta_b$ 成立.

对中性元 $a,b\in N$, 我们有 $a,b\in S$, 故有 $a\wedge b\in S$. 由定理 5, 只需再证明 $a\wedge b$ 是对偶分配的就行了. 由于 a,b 是对偶分配的,而在 L 的对偶格中,并运算正是 L 中的交运算,故由 (i) 已证得的结果, $a\wedge b$ 是对偶分配的,从而有 $a\wedge b\in N$. 由于中性元是自对偶的, $a\vee b\in N$ 也成立. 】

应注意分配元集 D 一般不能作成子格. 如下图所示的格中, a,b 是分配元但 $a\wedge b$ 不是,对图中的 x,y, $(a\wedge b)\vee(x\wedge y)$ 显然不等于 $((a\wedge b)\vee x)\wedge((a\wedge b)\vee y)$.

对于有界格,分配元、标准元或中性元可能有补元存在. 在本节开始提到的例 $\mathfrak{N}_5$ 中,分配元 c 的补元 b 不是

分配元，标准元 a 的补元 c 不是标准元． 但可以证明中性元如有补元，则必仍为中性元． 事实上，设 a 是有界格 L 的一个中性元，并设 a 有补元 a'． 根据定理 4 及其证明，我们有嵌入映射 φ： $L \to A \times B$，其中 $A=(a]$，$B=[a)$，$\varphi(x)=(x \wedge a, x \vee a)$，$\varphi(a)=(a,a)=(1_A,0_B)$． 不难看出 $\varphi(0)=(0,a)=(0_A,0_B)$，$\varphi(1)=(a,1)=(1_A,1_B)$． 由于在 $A \times B$ 中，$(0_A,0_B)$，$(1_A,1_B)$ 分别是它的零元和单位元，$\varphi(a)=(1_A,0_B)$ 在 $A \times B$ 中有唯一补元 $(0_A,1_B)$． 由于 φ 是嵌入，我们只能有 $\varphi(a')=(0_A,1_B)$． 但 $(0_A,1_B)$ 显然是 $A \times B$（更是 $\varphi(L)$）的中性元，故 a' 是 L 的中性元，于是中性元对取补元是封闭的．

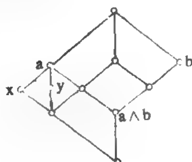


图 40

定义 7． 有补的中性元称为中心元，全体中心元作成的集称为格的中心．

定理 8． 有界格的中心是一个 Boole 格．

证明． 我们已知中心元的补元仍是中心元． 不难知道中心元的并和交也是中心元． 故有界格的中心是一个有补格． 它显然还是一个分配格，故它是一个 Boole 格． 】

第三章 习题

1. 设 L 是分配格,$I,J \in \mathcal{I}(L)$. 证明当 $I \vee J$ 和 $I \wedge J$ 都是主理想时,I,J 都是主理想.

[提示: 设 $I \vee J = (x]$,$I \wedge J = (y]$,利用定理 2.2 的结果,有 $i \in I, j \in J$ 使 $x = i \vee j$.]

2. 习题 1 的结论是否是格 L 是分配格的特征性质?

3. 证明引理 3.10: L 是格,$P \in \mathcal{P}(L)$,则对任意 $a,b,c \in L$ 有 $a \vee (b \wedge c) \in P \Leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c) \in P$.

4. 证明格 L 是分配格的充要条件是对任意 $x,y,z \in L$ 有 $x \wedge (y \vee z) \leqslant (x \wedge y) \vee z$.

[提示: 对任意三元 $a,b,c \in L$,在不等式中先令 $x = a \vee c, y = b, z = a$,再令 $x = b, y = c, z = a$.]

5. 利用习题 3 证明如果对格 L 的任意元 x,y, 只要 $x < y$, 就有 $P \in \mathcal{P}(L)$ 使 $x \in P, y \bar{\in} P$, 则 L 是一个分配格.

6. 利用定理1.1证明题5中的结论.

7. 证明在分配度量格中,当 $y \in [x \wedge z, x \vee z]$时,有

$$\rho(x,z) = \rho(x,y) + \rho(y,z).$$

8. 证明Stone引理的逆.

9. 设 L 是一个有单位元 1 的分配格. 证明每个素理想 P 都包含在 L 的一个极大素理想 Q 中(Q 称为**极大素理想**,如果 $Q \in \mathcal{P}(L)$,又当 $X \in \mathcal{P}(L)$并且 $X \supseteq Q$ 时,则 $X = Q$.)

10. 设 L 是有零元 0 的分配格. 证明每个素理想 P 都包含一个极小素理想($Q \in P(L)$称为 L 的一个**极小素理想**,如果 $X \in \mathcal{P}(L)$并且 $X \subseteq Q$ 时总有 $X = Q$.)

11. 设 L 为一分配格. 如果 L 的每个素理想都包含一个极小素理想,证明 L 必有零元 0.

12. 举例说明,一个格可以既没有极大素理想,也没有极小素理想.

13. 证明当 $P \in \mathcal{P}(L)$时,则$(P] \in \mathcal{P}(I(L))$. 问逆命题成立否?

14. 证明推论 2.5 的逆成立.

15. 设 L 是分配格,$x,y,a,b \in L, x \leqslant y, a \leqslant b$. 证明 $x \wedge a = y \wedge a, x \vee b = y \vee b \Leftrightarrow$ 有 $p,q \in L$ 使得 $x = (a \vee p) \wedge q, y = (b \vee p) \wedge q$.

16. 设 L 是分配格,$x,y,a,b \in L$. 证明当 $x \leqslant y \leqslant a \leqslant b$ 或 $a \leqslant b \leqslant x \leqslant y$ 时,有 $x \equiv y(\theta(a,b)) \Rightarrow x = y$.

17. 设 K 是分配格 L 的子格,证明当 $P \in \mathcal{P}(K)$时有 $Q \in \mathcal{P}(L)$使 $P = Q \cap K$.

18. 设 L 是格,$A \subseteq \mathcal{P}(L)$. L 上的一个二元关系 θ_A 的定义是: $x \equiv y(\theta_A) \Leftrightarrow$ 对一切 $P \in A$, 或者 $x,y \in P$ 或者 $x,y \in L - P$. 证明 θ_A 是 L 的同余关系.

19. 设 L 是一个有界分配格. 如果对 L 中每个元 x 都有唯一元$\bar{x}$ 对之对应并满足条件: (i) $\bar{\bar{x}} = x$; (ii)$\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$, 则 L 称为一个 Morgan 代数. 证明:

(i)$\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$; (ii)$\bar{0} = 1, \bar{1} = 0$; (iii)$x < y \Leftrightarrow \bar{x} > \bar{y}$.

20. 设 L 是格,L 的理想 I 称为相对于漏斗 F 是素的,如果 $x \wedge y \in I$ 又 $x \in F$ 则 $y \in I$. 证明

(i) 如果 I 相对于 F 是素的,则 $I \cap F = \Phi$.

(ii) 真理想 I 是素理想的充要条件是它相对于一切满足条件 $I \cap F = \Phi$ 的漏斗 F 都是素的.

(iii) 设 I 是理想,漏斗 F 与其它一切漏斗(按包含关系)均可比,则 I 相对于 F 是素的充要条件是 $I \cap F = \Phi$.

21. 设 L 是 Morgan 代数, $I \in I(L)$. 证明 $\bar{I} = \{\bar{x} \mid x \in I\}$ 是一个漏斗, 并且 I 相对于 $\bar{I}$ 是素理想.

22. 设 $B = (B; \vee, \wedge)$ 是 Boole 格, 对 $x, y \in B$ 定义

$$x + y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y), \quad x \cdot y = x \wedge y,$$

这里 x', y' 分别是 x, y 的补元. 证明 $B = (B; +, \cdot)$ 是一个有单位元并满足条件 $x^2 = x \cdot x = x$ 的环(这种幂等环称为 Boole 环).

反过来, 如果 $B = (B; +, \cdot)$ 是一个有单位元的 Boole 环, 则对 $x, y \in B$ 定义 $x \vee y = x + y + x \cdot y, x \wedge y = x \cdot y$ 时, 得到的 $B = (B; \vee, \wedge)$ 是一个 Boole 格.

23. 设 $\mathscr{S}_0$ 和 $\mathscr{S}_1$ 是两个无公共点的 Stone 空间. 考虑并集 $\mathscr{S} = \mathscr{S}_0 \cup \mathscr{S}_1$, 规定 $U \subseteq \mathscr{S}$ 是开集当且仅当 $U \cap \mathscr{S}_0$ 和 $U \cap \mathscr{S}_1$ 分别 $\mathscr{S}_0$ 和 $\mathscr{S}_1$ 的开集. 证明当 $\mathscr{S}_0$ 和 $\mathscr{S}_1$ 都是分配格的 Stone 空间时, $\mathscr{S}$ 也是.

24. 证明在题 23 中, 当 $\mathscr{S}_0 = \mathscr{S}(L_0), \mathscr{S}_1 = \mathscr{S}(L_1)$ 时, 有 $\mathscr{S} = \mathscr{S}(L_0 \times L_1)$.

25. 证明: (i) 当 $a \in L$ 是分配元时, 主理想 (a] 是一个同余关系的完整同余类; (ii) 在图 41 所示的格中, (a] 是一个同余关系的完整同余类, 但元 a 不是分配元.

26. 设 a 是格 L 的分配元, 证明 $L / \theta_a \cong (a]$.

27. 证明元 a 是标准元的充要条件是 $x \leqslant a \vee y \Rightarrow x = (x \wedge a) \vee (x \wedge y)$.

28. 证明对模格来说, 分配元 = 标准元 = 中性元.



图 41

29. 设 a,b 是格 L 的分配元，用直接验证 $\theta_{a\vee b}=\theta_a\vee\theta_b$ 的办法证明两个分配元的并是分配元．

30. 证明映射 $a\to\theta_a$ 是标准元作成的子格到同余关系格的一个嵌入．

31. 设 L 是有界分配格，证明当 $a,b\in L$ 又 $a\leqslant b$ 时，$\theta(a,b)$ 在 $C(L)$ 中有补元 $\theta(0,a)\cdot\theta(b,1)$．

第四章　伪补格

§1. 伪补格

设 L 是有界分配格，$a \varepsilon L$. 如果 a 有补元 a' 存在，则 a 是集 $\{x \varepsilon L \mid a \wedge x = 0\}$ 的最大元. 事实上由于 $a \wedge a' = 0$，a' 属于这个集. 如果有 $x \varepsilon L$ 使 $a \wedge x = 0$，但 $x \not\leqslant a'$. 则 $y = x \vee a' > a'$. 由于 $a \wedge y = (a \wedge x) \vee (a \wedge a') = 0$，又 $a \vee y \geqq a \vee a' = 1$. y 是不同于 a' 的 a 的另一个补元，这不可能. 故必有 $x \leqslant a'$，而 a' 是所说的最大元.

对于一般的格，补元可以有以下的推广概念.

定义 1. 设 L 是一个有零元 0 的格，$a \varepsilon L$. 元 a^* 称为元 a 的**伪补元**（**简称伪补**），如果 $a \wedge a^* = 0$ 又对一切 $x \varepsilon L$ 有 $a \wedge x = 0 \Rightarrow x \leqslant a^*$.

换句话说，当 a^* 存在时，它是集 $\{x \varepsilon L \mid a \wedge x = 0\}$ 的最大元. 故对有界分配格来说，有补元有伪补存在（即补元本身）.

定义 2. 设 L 是一个有 0 的格，如果每个元 $a \varepsilon L$ 都有伪补 a^* 存在，则我们称 L 为一个伪补格.

很明显，Boole 格是伪补格. 但不难验证，极其简单的格 $\mathfrak{M}_3$ 却不是伪补格. 虽然这样，伪补格仍是一类非常重要的格，我们很快就会知道，有许多重要的格都是伪补

格.

我们注意到在伪补的定义中只用到交运算，这使得我们可以在所谓交半格中定义伪补的概念.

定义 3. 具有一个二元运算 $\circ$ 的代数系统 $(A,\circ)$ 称为一个**半格**，如果运算 $\circ$ 满足幂等律，交换律和结合律.

对于一个格 $L=(L;\ \vee,\wedge)$，如果我们只考虑其中一个运算时，则 $(L,\vee)$ 和 $(L,\wedge)$ 都是半格. 但这两个半格又有所不同. 因为 L 原来又是一个偏序集 $L=(L,\leqslant)$. 这里偏序 $\leqslant$ 与运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 的关系是不相同的. 就是说，对 $\vee$ 我们有 $x\leqslant y \Leftrightarrow x\vee y=y$，对 $\wedge$ 则有 $x\leqslant y \Leftrightarrow x\wedge y=x$. 由此我们引导到以下定义.

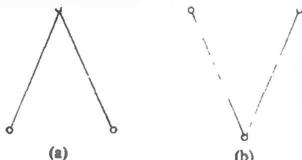


图42

定义 4. 如果半格 $(A,\circ)$ 同时是一个偏序集（设偏序仍记作 $\leqslant$）. 则当运算 $\circ$ 与偏序 $\leqslant$ 间有关系

$$x\leqslant y \Leftrightarrow x\circ y=y \qquad (x,y\in A)$$

时，我们称半格 $(A,\circ)$ 为一个**并半格**. 如果关系

$$x\leqslant y \Leftrightarrow x\circ y=x \qquad (x,y\in A)$$

成立，则 $(A,\circ)$ 称为一个**交半格**.

不难证明，当 $(A,\circ)$ 是并半格时，$x\circ y=\mathrm{Sup}\{x,y\}$. 当 $(A,\circ)$ 是交半格时，则有 $x\circ y=\mathrm{Inf}\{x,y\}$（作为习题请读者证明）. 当 $L=(L;\vee,\wedge)$ 是格时，$(L,\vee)$ 是并半

格，$(L,\wedge)$ 是交半格．今后我们总把并半格的运算 $\circ$ 记作 $\vee$，交半格的运算 $\circ$ 记作 $\wedge$．

无论并半格或是交半格通常都不是格．图 42 所示是两个最简单的例，其中 (a) 是并半格，(b) 是交半格．

定义 5. 设 $L=(L,\wedge)$ 是一个有 0 的交半格．如果对元 $a\varepsilon L$ 有元 a^* 使得 $a\wedge x=0 \Leftrightarrow x\leq a^*(x\varepsilon L)$，则 a^* 称为元 a 的**伪补（元）**．如果 L 的每个元 a 都有伪补元 a^* 存在，则 L 称为一个**伪补交半格**．

很明显，如果元 a 有伪补元 a^* 存在，则 a^* 是唯一的．

定理 6. **伪补交半格一定有界**．

证明． 按定义伪补交半格有最小元 0．对任意元 $x\varepsilon L$，按 0 的定义有 $0\wedge x=0$，于是 0^* 就是 L 的最大元（今后我们仍记最大元为 1）．

定义 7. 设 $L=(L,\wedge)$ 是伪补交半格，集

$$B(L)=\{a^* \mid a\varepsilon L\}$$

称为 L 的**骨架**，B(L) 中的元称为 L 的闭元．集

$$D(L)=\{a\varepsilon L \mid a^*=0\}$$

称为 L 的**稠集**，D(L) 中的元称为 L 的**稠元**．

定理 8. **设 $L=(L,\wedge)$ 是伪补交半格，则对一切 $a,b\varepsilon L$ 有**

(i) $a\leqslant a^{**}$，

(ii) $a\leqslant b \Rightarrow a^*\geqslant b^*$，

(iii) $a^*=a^{***}$，

(iv) $a\varepsilon B(L) \Leftrightarrow a=a^{**}$，

(v) $a,b\varepsilon B(L) \Rightarrow a\wedge b\varepsilon B(L)$

(vi) 把B(L)看成偏序集(用L的序)，当 $a,b\varepsilon B(L)$ 时，有

$$\mathrm{Sup}_{B(L)}\{a,b\}=(a^*\wedge b^*)^*.$$

证明． (i),(ii) 显然． 对于 (iii), 由 (i) 和 (ii) 有 $a^{***}\leqslant a^*$． 由 (i) 又有 $a^*\leqslant(a^*)^{**}=a^{***}$． 对于 (iv), 当 $a\in B(L)$ 时，有 $b\in L$ 使 $a=b^*$，于是由 (iii) 得到 $a=b^{***}=a^{**}$． 反过来，如果 $a=a^{**}$，则令 $b=a^*$ 时，有 $a=b^*\in B(L)$．

要证明 (v), 设 $a,b\in B(L)$, 则 $a=a^{**},b=b^{**}$． 由于 $a\wedge b\leqslant a,b$, 两次用 (ii) 得到 $(a\wedge b)^{**}\leqslant a^{**},b^{**}$，从而 $(a\wedge b)^{**}\leqslant a^{**}\wedge b^{**}=a\wedge b$． 但由 (i) 有 $a\wedge b\leqslant(a\wedge b)^{**}$，故有 $(a\wedge b)^{**}=a\wedge b$，由 (iv) 知道 $a\wedge b\in B(L)$．

最后来证明 (vi)． 设 $a,b\in B(L)$． 由于 $a^*\geqslant a^*\wedge b^*$，$a=a^{**}\leqslant(a^*\wedge b^*)^*$． 同理有 $b\leqslant(a^*\wedge b^*)^*$． 由于 $(a^*\wedge b^*)^*\in B(L)$，它是 $\{a,b\}$ 在 $B(L)$ 中的一个上界． 设 $x\in B(L)$ 也是 $\{a,b\}$ 的一个上界，$a,b\leqslant x$． 从而 $a^*,b^*\geqslant x^*$，$a^*\wedge b^*\geqslant x^*$． 于是有 $(a^*\wedge b^*)^*\leqslant x^{**}=x$，即 $(a^*\wedge b^*)^*=\mathrm{Sup}_{B(L)}\{a,b\}$． ▌

定理 9. 设 L 是伪补交半格． 如果对 $a,b\in B(L)$，规定

$$a\dot{\vee}b=(a^*\wedge b^*)^*.$$

则 $B(L)=(B(L);\dot{\vee},\wedge)$ 作成一个 Boole 格，其中交运算就是 L 中的 $\wedge$．

证明． 首先不难证明 $B(L)=(B(L);\dot{\vee},\wedge)$ 是有补格．

事实上，由于 $0=1^*,1=0^*$，$0,1\in B(L)$． 对于任意 $a\in B(L)$，$a^*\in B(L)$． 又由于 $a\wedge a^*=0$，$a\dot{\vee}a^*=(a^*\wedge a^{**})^*=0^*=1$，$a^*$ 就是 a 的补元．

要证 B(L)是分配格,根据定理 8 的(v)和(vi),它已是一个格. 因此只需证明分配性. 根据习题 III.4. 我们只需证明有不等式 $x\wedge(y\dot{\vee}z)\leqslant(x\wedge y)\dot{\vee}z$ 成立即可. 这里 $x,y,z\in B(L)$是任意三元. 事实上,由于 $z\wedge x, y\wedge x\leqslant(x\wedge y)\dot{\vee}z$ 有 $z\wedge x\wedge((x\wedge y)\dot{\vee}z)^{*}=0, y\wedge x\wedge((x\wedge y)\dot{\vee}z)^{*}=0$. 故有 $x\wedge((x\wedge y)\dot{\vee}z)^{*}\leqslant y^{*},z^{*}$ 从而 $\leqslant y^{*}\wedge z^{*}$. 由此我们得到 $x\wedge((x\wedge y)\dot{\vee}z)^{*}\wedge(y^{*}\wedge z^{*})^{*}=0$. 进而有 $x\wedge(y^{*}\wedge z^{*})^{*}\leqslant((x\wedge y)\dot{\vee}z)^{**}=(x\wedge y)\dot{\vee}z$,也就是 $x\wedge(y\dot{\vee}z)\leqslant(x\wedge y)\dot{\vee}z$,故 B(L)为一个分配格. 】

定理 10. 设 L 是伪补交半格. 对任意 $a,b\in L$ 总有

$$(a\wedge b)^{**}=a^{**}\wedge b^{**},$$

从而稠集 D(L) 是 L 的一个漏斗.

证明. 我们只需证明等式

$$(a\wedge b)^{*}=(a^{**}\wedge b^{**})^{*}$$

即可. 考虑元 $x=(a\wedge b)^{*}\wedge a^{**}\wedge b^{**}$. 由于 $x\leqslant(a\wedge b)^{*}$,有 $x\wedge a\wedge b=0$, 从而 $x\wedge a\leqslant b^{*}$. 但由 x 的定义有 $x\leqslant b^{**}$, 故 $x\wedge a\leqslant b^{*}\wedge b^{**}=0$, 即 $x\leqslant a^{*}$. 又由于 $x\leqslant a^{**}$, 我们得到 $x\leqslant a^{*}\wedge a^{**}=0$. 就是说,$(a\wedge b)^{*}\leqslant(a^{**}\wedge b^{**})^{*}$. 相反的不等式明显成立, 这就得到了所要的等式.

现在设 $a,b\in D(L)$, 我们有 $a^{*}=0,b^{*}=0$. 于是有 $(a\wedge b)^{*}=(a^{**}\wedge b^{**})^{*}=1^{*}=0$, 即 $a\wedge b\in D(L)$. 当 $x\geqslant a$ 时, 有 $x^{*}\leqslant a^{*}=0$, 所以也有 $x\in D(L)$. 故 D(L) 为一漏斗. 】

当$L=(L;\ \vee,\wedge)$是伪补格时,它具有更好的性质.

定理 11. 设 $L=(L;\vee,*)$ 是伪补格，则我们还有

$$(a\vee b)^*=a^*\wedge b^*.$$

由此可知，对Boole格B(L)，其并运算这时可定义为

$$a\dot{\vee}b=(a\vee b)^{**}$$

证明. 不等式 $(a\vee b)^*\leqslant a^*\wedge b^*$ 显然成立. 对相反的不等式，由于 $a\leqslant a^{**}\leqslant(a^*\wedge b^*)^*$，$b\leqslant b^{**}\leqslant(a^*\wedge b^*)^*$，有 $a\vee b\leqslant(a^*\wedge b^*)^*$，从而 $a^*\wedge b^*=(a^*\wedge b^*)^{**}\leqslant(a\vee b)^*$，故 $(a\vee b)^*=a^*\wedge b^*$ 成立.

对等式再取一次伪补，得到 $a\dot{\vee}b=(a^*\wedge b^*)^*=(a\vee b)^{**}$. 】

等式 $(a\vee b)^*=a^*\wedge b^*$ 是关于伪补运算 * 的一个 de Morgan 公式（参见第三章习题19）. 我们指出，对于一般伪补格，另一个公式 $(a\wedge b)^*=a^*\vee b^*$ 是不成立的. 下图所示的伪补格中，有 $a^*=b$，$b^*=a$，$a^*\vee b^*=c$，但 $(a\wedge b)^*=o^*=1\neq c$

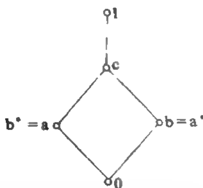


图43

下面我们来看几类重要的伪补格.

定理 12. 有限分配格是伪补格.

证明. 对任意 $a\in L$，考虑集

$$S=\{x\in L\mid a\wedge x=0\}.$$

令 $x_0 = \vee S$. 由分配性有 $a \wedge x_0 = a \wedge \vee S = \vee_{x \varepsilon S}(a \wedge x) = 0$. 于是 $x_0 \varepsilon S$ 它显然是 S 中的最大元，就是说 $a^* = x_0$ 存在. ▌

定义 13. 设 L 是完备格. 如果对任意元 $a \varepsilon L$ 和任意子集 $S \subseteq L$，总有等式

$$a \wedge \vee S = \vee_{x \varepsilon S}(a \wedge x)$$

成立，我们说格L有**并无穷分配性**. 如果总有

$$a \vee \wedge S = \wedge_{x \varepsilon S}(a \vee x)$$

成立，则说 L 有**交无穷分配性**. 如果两者同时成立，则 L 称为一个**无穷分配格**.

下述定理是定理12的明显推广.

定理14. 具有并无穷分配性的完备格是伪补格. ▌

一类重要的伪补格是分配的代数格. 我们先证明两个关于代数格的基本事实.

引理 15. 设 L 是代数格，则对任意元 $a \varepsilon L$ 和任意链 $C \subseteq L$ 有

$$a \wedge \vee C = \vee_{x \varepsilon C}(a \wedge x).$$

证明. 令 $y = a \wedge \vee C, z = \vee_{x \varepsilon C}(a \wedge x)$，我们有 $y \geqslant z$. 由于 L 是代数格，$y = \vee\{c \leqslant y \mid c \text{ 是紧元}\}, z = \vee\{c \leqslant z \mid c \text{ 是紧元}\}$. 如果我们能证明对任意紧元 c 总有 $c \leqslant y \Rightarrow c \leqslant z$，则我们又有 $y \leqslant z$，从而有 $y = z$，即所要的等式成立. 设紧元 c 满足 $c \leqslant y = a \wedge \vee C$. 我们有 $c \leqslant a$ 并且 $c \leqslant \vee C$. 由 c 的紧性，有有限子集 $C_0 \subseteq C$，使 $c \leqslant \vee C_0$. 由于 C 是链，C_0 中有最大元 $x_0 = \vee C_0$，从而 $c \leqslant a \wedge x_0 \leqslant z$. ▌

引理 16. 设 L 是代数格，$a \varepsilon L, S \subseteq L$. 如果用 $\sum$

记 Σ S 的一切有限子集 S_0 作成的集，则等式

$$a \wedge \bigvee S = \bigvee_{S_0 \in \Sigma}(a \wedge \bigvee S_0)$$

成立.

证明. 当 S 是有限集时，定理显然成立.

因此我们设 S 是无穷集，我们对基数 $|S|$(它一般是超穷数)进行(超穷)归纳. 假定等式对一切基数小于 $|S|$ 的集已经成立. 把 S 的元排成一个(通常是超穷的)序列 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_\xi, \cdots (\xi < \lambda)$, 这里 λ 是满足条件 $|\lambda| = |S|$ 的第一个序数(这里我们用到了良序公理，它与 Zorn 引理等价.) 令 $S_\xi = \{x_\eta \mid \eta < \xi\}$. 对每个 $\xi < \lambda$, 我们都有 $|S_\xi| < |S|$. 元 $\bigvee S_\xi, \xi < \lambda$, 作成 L 中的一个链. 因此，如果用 $\sum_\xi$ 记 S_ξ 的一切有限子集作成的集，则根据引理 15 有

$$\begin{aligned} a \wedge \bigvee S &= a \wedge \bigvee_{\xi < \lambda} \bigvee S_\xi = \bigvee_{\xi < \lambda}(a \wedge \bigvee S_\xi) \\ &= \bigvee_{\xi < \lambda} \bigvee_{S_0 \in \Sigma_\xi}(a \wedge \bigvee S_0) = \bigvee_{S_0 \in \Sigma}(a \wedge \bigvee S_0), \end{aligned}$$

定理于是成立. 】

定理 17. 分配的代数格是伪补格.

证明. 对任意元 $a \in L$ 与任意子集 $S \subseteq L$, 由引理 16 有 $a \wedge \bigvee S = \bigvee_{S_0 \in \Sigma}(a \wedge \bigvee S_0)$. 由于 S_0 有限又 L 是分配格，有 $a \wedge \bigvee S_0 = \bigvee_{x \in S_0}(a \wedge x)$. 从而

$$a \wedge \bigvee S = \bigvee_{S_0 \in \Sigma} \bigvee_{x \in S_0}(a \wedge x) = \bigvee_{x \in S}(a \wedge x)$$

即格L有并无穷分配性. 根据定理14,L是伪补格. 】

推论 18. 任意格 L 的同余关系格 $C(L)$ 是伪补格. 有零元的分配格 L 的理想格 $I(L)$ 是伪补格. 】

在结束本节之前，我们对伪补格作为一个代数再进行一

点考察． 作为一个代数，伪补格中的伪补应看作是格中的一种一元运算 *：$L \to L$，它给每个元 $a \varepsilon L$ 对应一个运算结果 $a^* \varepsilon L$，称为元 a 的伪补． 按同样观点，在代数中指定特定的元（现在是 0 和 1）应看作是所谓零元运算． 因此一个伪补格 $L = (L;\ \vee, \wedge)$ 可以看成是一个 (2,2,1,0,0) 型的代数 $L = (L;\ \vee, \wedge, ^*, 0, 1)$，就是说，它是一个具有两个二元运算 $\vee$ 和 $\wedge$，一个一元运算 * 和两个特定元 0 和 1 的代数．为了区别于伪补格，我们在持这种观点时把 L 称为一个 p 代数（即伪补代数）．

我们习惯上把 Boole 格称作 Boole 代数就是现在所说意义下的代数． 它是一个特殊的 p 代数． 它的伪补运算就是补运算 $'$． 它比一般的 $*$ 具有更好的性质，例如它满足两个 Morgan 律：$(a \vee b)' = a' \wedge b'$；$(a \wedge b)' = a' \vee b'$，并且是一个对合运算，即满足条件 $a'' = a$． 第三章（习题）中我们考虑过的 Morgan 代数 $L = (L;\ \vee, \wedge, \bar{\ }, 0, 1)$ 也是一个 (2,2,1,0,0) 型代数，并且这里一元运算 $\bar{\ }$ 也满足 Morgan 律并且是对合运算，但它不是 p 代数，因为一般没有 $a \wedge \bar{a} = 0$.

我们把 p 代数和伪补格加以区别并非只是称谓的不同． 它们是有实质的差异的． 以同余关系为例，当 $\theta \varepsilon C(L)$ 只看作是格的同余关系时，我们要求它保持格运算，即当 $a \equiv b(\theta), c \equiv d(\theta)$ 时，应有 $a \vee c \equiv b \vee d(\theta)$ 和 $a \wedge c \equiv b \wedge d(\theta)$． 但作为 p 代数 L 的同余关系时，则还要求它能进一步保持一元运算 $*$，即当 $a \equiv b(\theta)$ 时还应有 $a^* \equiv b^*(\theta)$． 例如图 43 所示的格 L，作为分配格它有 8 个同余关系，但作为 p 代数则它只有 5 个同余关系了．

同样，作为 p 代数的 L，子集 $K \subseteq L$ 是 L 子代数应具有和 L 相同的零元 0 和单位元 1（就是说，有相同的零元运算），并且对运算 * 也封闭，即当 $a \in K$ 时有 $a^* \in K$（一元运算也与 L 中相同）. 对于同态概念也一样. $\varphi: L \to L_1$ 作为 p 代数的同态，我们除去要求 φ 满足通常的条件 $\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b), \varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b)$ 外，还要求 φ 保持零元运算和一元运算，即应有 $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1$ 以及 $\varphi(a^*) = (\varphi(a))^*$. 仍以图 43 所示的格为例. 作为分配格，它有 25 个子格；但作为 p 代数它只有 3 个子代数.

§2. Stone 代数

p 代数的经典代表是 Boole 代数. 这是一个已被详细研究了的数学对象. 关于它已有许多专门著作出版. 本书不对它作特别研究.

我们着手研究的第一类 p 代数是所谓 S 代数，其定义如下：

定义 1. 设 $L = (L; \vee, \wedge, ^*, 0, 1)$ 是一个 p 代数，如果对一切 $a \in L$，都有等式

$$a^* \vee a^{**} = 1$$

成立，我们称 L 为一个 S 代数.

分配的 S 代数称为 Stone 代数.

很明显，Stone 代数是 Boole 代数的一个直接推广. 但 Stone 代数是比 Boole 代数广泛得多的一类代数. 事实上，任取一个分配格 L_1，不管 L_1 是否有上界或下界，我们给它添上一个新零元 0 和一个新单位元 1，不难验证当我们保持 L_1 原来的序关系不变时，$L = L_1 \cup \{0\} \cup \{1\}$ 总作成一

个 Stone 代数 (图 44).



图44

事实上，对任意 $a \in L_1 \cup \{1\}$, 我们有 $a^* = 0$, 从而有 $a^* \vee a^{**} = 0 \vee 1 = 1$. 当 $a = 0$ 时，$a^* \vee a^{**} = 1 \vee 0 = 1$. 从这个事实可以看出，Stone 代数比我们容易认为的 (因为要求它的每个元 a 都满足条件 $a^* \vee a^{**} = 1$) 要多得多. 实际上，按照刚才的构造法可知，Stone 代数与分配格一样多. 另一方面，我们也不难发现，有无穷多的分配格不是 Stone 格，甚至不是伪补格.

对于 S 代数有同样的结论.

本节中我们先讨论 Stone 代数

定理 2. 对分配的伪补格 L, 下列条件等价:

(i) L是Stone代数,

(ii) 对一切$a, b \in L$,有$(a \wedge b)^* = a^* \vee b^*$,

(iii) $a, b \in B(L) \Rightarrow a \vee b \in B(L)$,

(iv) B(L)是L的子代数.

证明. (i) $\Rightarrow$ (ii): 由于 $a^* \vee b^* \leqslant (a \wedge b)^*$, 我们有 $(a \wedge b) \wedge (a^* \vee b^*) \leqslant (a \wedge b) \wedge (a \wedge b)^* = 0$. 假设有 $(a \wedge b) \wedge x = 0$, 则 $b \wedge x \leqslant a^*$. 由此得到 $b \wedge x \wedge a^{**} \leqslant a^* \wedge a^{**} = 0$, 故有 $x \wedge a^{**} \leqslant b^*$. 于是 $x = x \wedge 1$

$=x\wedge(a^*\vee a^{**})=(x\wedge a^*)\vee(x\wedge a^{**})\leqslant a^*\vee b^*$. 就是说，有 $(a\wedge b)^*=a^*\vee b^*$.

(ii) ⇒ (iii). 当 $a,b\in B(L)$ 时，有 $x,y\in L$ 使 $a=x^*$, $b=y^*$. 故有 $a\vee b=x^*\vee y^*=(x\wedge y)^*\in B(L)$.

(iii) ⇒ (iv). 当 (iii) 成立时，在 B(L) 中有 $a\dot{\vee}b=(a^*\wedge b^*)^*=(a\vee b)^{**}=a\vee b$. 故 B(L) 的并运算就是 L 的并运算. 又已知运算 ∧ 和 * 也与 L 相同，并且 $0,1\in B(L)$. 故 B(L) 是 L(作为 P 代数) 的子代数.

(iv) ⇒ (i). 显然. ▌

根据定理 1.11, 我们已知对任意 p 代数，都有 $(x\vee y)^*=x^*\wedge y^*$. 因此根据本定理，对 Stone 代数两个 Morgan 公式都成立.

下面我们考虑 Stone 代数的几个另外形式的等价条件.

定理 3. **分配的 p 代数 L 是 Stone 代数的充要条件是 L 的每个素漏斗只包含在一个极大真漏斗中.**

证明. 先设 L 是 Stone 代数，但有素漏斗 F 包含在两个不同的极大真漏斗 G_1 和 G_2 中. 任取元 $a\in G_1-G_2$. 由于 $a\wedge a^*=0$, $a^*\bar{\in}G_1$, 从而有 $a^*\bar{\in}F$. 又由于 G_2 是极大真漏斗，有 $G_2\vee[a)=L$. 故有 $x\in G_2$ 使得 $x\wedge a=0$, 从而 $x\leqslant a^*$, 故 $a^*\in G_2$. 同上有 $a^{**}\bar{\in}G_2$, 更有 $a^{**}\bar{\in}F$. 这与 $a^*\vee a^{**}=1\in F$ 相矛盾，因为 F 是素漏斗. 故条件是必要的.

反过来，我们设 L 不是 Stone 代数. 于是有元 $a\in L$ 使 $a^*\vee a^{**}=b<1$. 由 Stone 引理的对偶定理，有素漏斗 F 与理想 (b] 不相交. 考虑漏斗 $G=F\vee[a^*)$, 它不能包

含 a^{**}，因为否则 $0=a^{*}\wedge a^{**}\in G$，从而有元 $x\in F$ 使 $x\wedge a^{*}=0$，即 $x\leqslant a^{**}$．但这样一来就有 $x\leqslant b$，而与 $F\cap(b]=\Phi$ 相矛盾．故 $a^{**}\bar{\in}G$.

易知包含 G 但不与 $(a^{**}]$ 相交的漏斗族中有极大元 G_1．G_1 一定是 L 的极大真漏斗，因为任意真包含 G_1 的漏斗都要与 $(a^{**}]$ 相交，即要包含 a^{**}．但 G_1 中已含有 a^{*}，从而这个漏斗要包含 $a^{*}\wedge a^{**}=0$，即它已不再是真漏斗了．

同样办法可知，有极大真漏斗 G_2 包含 $F\vee[a^{**})$ 但不包含 a^{*}．于是漏斗 F 包含在两个不同的极大真漏斗 G_1 和 G_2 中而定理的条件不能成立．这就证明了定理的条件也是充分的．】

定理 4．分配的 P 代数 L 是 Stone 代数的充要条件是它的每个素理想只包含一个极小素理想．

证明．设 L 是 Stone 代数又 P 是 L 的一个素理想．由于 $F=L-P$ 是素漏斗，根据定理 3,F 只包含在一个极大真漏斗 G 中．和 Stone 引理的证明类似，可知极大真漏斗是素漏斗．从而 $L-G$ 是包含在 P 中的唯一极小素理想．

反过来，设分配 p 代数 L 的每个素理想只包含一个极小素理想，又 F 是一个素漏斗．设 P 是包含在素理想 $L-F$ 中的唯一极小素理想，则 $L-P$ 是包含 F 的唯一极大真漏斗．于是由定理 3 知道 L 是 Stone 代数．】

定理 5．分配的 p 代数 L 是 Stone 代数的充要条件是对 L 的任意两个不同的极小素理想 P,Q 都有 $P\vee Q=L$.

证明．设分配 P 代数 L 有两个不同的极小素理想使得 $P\vee Q\neq L$．由对偶的 Stone 引理有素漏斗 F

使 $F \cap (P \vee Q) = \Phi$. 从而素理想 $L - F$ 含有两个不同的极小素理想 P 与 Q，按定理 4,L 不是 Stone 代数，故定理的条件是必要的．

反过来，如果 L 不是 Stone 代数． 同样由定理 4，有素理想 P 包含两个互不相同的极小素理想 Q 和 R． 但这样一来，就有 $Q \vee R \subseteq P \neq L$. 故定理的条件也是充分的． 】

定义 6. 格 L 称为一个**相对 Stone 代数**，如果作为子格的每个区间都是伪补格并且是 Stone 代数．

我们来考虑相对 Stone 代数的特征性质． 先注意到有以下事实．

引理 7. **对于分配格 L，它的漏斗 F 是素漏斗的充要条件是 F 是漏斗格 $\mathcal{F}(L)$ 的交既约元．**

证明． 设 F 是素漏斗，又 $F = G \wedge H, G, H \in \mathcal{F}(L)$. 当然有 $F \subseteq G, H$. 如果两个等号都不成立，则有元 $a \in G - F, b \in H - F$. 由于 $a \vee b \in G \wedge H = F$，而 F 又是素漏斗，这是一个矛盾．故必有 $G = F$ 或 $H = F$ 成立，即 F 是 $\mathcal{F}(L)$ 中的交既约元．

反过来，如果漏斗 F 是 $\mathcal{F}(L)$ 中的交既约元，但 F 不素．则有元 $a, b \in L - F$ 但 $a \vee b \in F$. 我们证明有 $F = (F \vee [a)) \wedge (F \vee [b))$. 事实上，对任意元 $x \in (F \vee [a)) \wedge (F \vee [b))$，有 $c, d \in F$ 使 $x = (c \wedge a) \vee (d \wedge b)$（根据定理 Ⅲ．2．2 的对偶定理），从而 $x = (c \vee d) \wedge (c \vee b) \wedge (a \vee d) \wedge (a \vee b) \in F$，就是说，有 $(F \vee [a)) \wedge (F \vee [b)) \subseteq F$. 反方向包含关系显然成立，故有所说的等式． 于是由 F 的交既约性知道有 $F = F \vee [a)$ 或 $F = F \vee [b)$，即 $a \in F$ 或 $b \in F$. 这个矛盾证明了 F 是素

漏斗. ▮

定理 8. 设分配格 L 的每个区间(作为一个子格)都是伪补格,则 L 是相对 Stone 代数的充要条件是它每个包含素漏斗的漏斗都是素漏斗.

证明. 先证条件的充分性. 设条件成立,但 L 不是相对 Stone 代数. 于是有区间 [a,b] 不是 Stone 代数. 根据定理 3, 作为 p 代数 [a,b] 有素漏斗 F′ 包含在 ([a,b] 的) 两个不同的极大真漏斗 G′ 和 H′ 中. 由于 L 是分配格,映射 $x \to (x \vee a) \wedge b$ 是从 L 到 [a,b] 的满同态. 设 F,G,H 分别是 F′,G′,H′ 在这个同态下的原象,则它们都是 L 的漏斗,并且 F 是素漏斗. 容易知道,G,H 都真包含 F 并且两者互不包含. 从 $F \subseteq G \wedge H$ 知到 $G \wedge H$ 应是一个素漏斗. 但由于 G,H 互不包含,$G \wedge H$ 既不能是 G 也不能是 H, 就是说它不是交既约元. 根据引理 7, 它又不能是素漏斗. 这个矛盾说明 L 只能是相对 Stone 代数. 充分性于是得证.

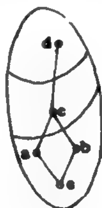


图45

反过来,假设已知 L 是相对 Stone 代数但 L 有素漏

斗 F 包含在一个非素漏斗 G 中． 我们证明这也要导致一个矛盾． 由于 G 非素，有 $a,b \in L-G$ 使 $c=a\vee b\in G$. 又由于 F 是素的，有 $c \bar{\in} F$. 任取一个 $d\in F$ 使 $d>c$, 再令 $c=a\wedge b$. 根据已知条件，区间 $[c,d]$ 是一个 Stone 代数．

我们暂且用 * 来记伪补格 $[c,d]$ 上的伪补． 由于 $a\wedge b=c$, 我们有 $b\leqslant a^*$, 从而 $c\wedge a^*=(a\vee b)\wedge a^*=b\wedge a^*=b\bar{\in} G$. 已知 $c\in G$, 故只有 $a^*\bar{\in} G$, 当然更有 $a^*\bar{\in} F$. 由对称性，也有 $b^*\bar{\in} F$ 但已知 $[c,d]$ 是 Stone 代数，我们又有 $a^*\vee b^*=(a\wedge b)^*=c^*=d\in F$. 这就与 F 是素漏斗相矛盾，从而条件必要性也得证． 】

在本节的最后，我们给出有限 Stone 代数的一个特征条件． 先证明一个引理．

引理 9. 设元 a 是格 L 的一个中心元（有补的中性元），则映射 $\varphi:L\to(a]\times[a)$, 这里对一切 $x\in L$, $\varphi(x)=(a\wedge x,a\vee x)$, 是一个格同构．

证明． 在定理 Ⅲ.5.4 的证明中，我们已知 φ 是一个嵌入映射． 现在只需证明它还是满射就行了． 对任意 $(u,v)\in(a]\times[a)$, 考虑元 $x=(u\vee a')\wedge v$, 这里 a' 是 a 的补元． 直接计算就知道有 $\varphi(x)=(u,v)$. 】

定义 10. 一个有零元 0 的格称为一个稠格，如果它的非零元有最小元． 这个最小元显然是格唯一的一个原子，

很明显，有界稠格是 S 代数，分配的有界稠格是 Stone 代数．

定理 11. 有限分配格 L 是 Stone 代数的充要条件是：L 是有限个有限分配稠格的直积．

证明．我们先证对任意 Stone 代数 L，它有不同于 0 和 1 的有补元的充要条件是 $B(L) \neq \{0,1\}$．事实上，如果 $a \neq 0,1$ 是一个有补元，则 $a^* = a'$，$a^{**} = a'' = a$，即 $a \in B(L)$，从而 $B(L) \neq \{0,1\}$．反过来当 $B(L) \neq \{0,1\}$ 时，有 $a \in B(L)$，$a \neq 0,1$．元 a 显然是有补元．其次我们证明当 L 是 Stone 代数时，对任意 $a \in L$，$(a]$ 是 Stone 代数．对任意 $x \in (a]$，不难验证 $x^* \wedge a \in (a]$ 是 x 在 $(a]$ 中的伪补．$(a]$ 当然是分配格．要证明它是 Stone 代数，只要验证对任意 $x \in (a]$ 有 $(x^* \wedge a) \vee ((x^* \wedge a)^* \wedge a) = a$，这是一个简单的计算问题，留给读者去完成．类似可以证明当 $a \in B(L)$ 时 $[a)$ 也是 Stone 代数．

现在我们设 L 是一个有限分配格．当 L 是一个 Stone 代数时，如果 $B(L) = \{0,1\}$，则 L 本身就是一个稠格．事实上这时 L 不能有两个不同的原子．因为如有 $a,b > 0$ 又 $a \neq b$，则 $a \wedge b = 0$，$a \leqslant b^* \in B(L) = \{0,1\}$．由此知 $b^* = 1$，$b^{**} = 0$ 与 $b \leqslant b^{**}$ 矛盾．故 L 只有一个原子．由于 L 有限，它显然就是 L 的最小非零元．因此当 $B(L) = \{0,1\}$ 时，L 为一稠格．如有 $B(L) \neq \{0,1\}$，则如前所述有补元 $a \neq 0,1$．根据引理 9 有 $L \cong (a] \times [a) = L_1 \times L_2$．前面已经知道，这时 $L_1 = (a]$，$L_2 = [a)$ 都是 Stone 代数．当 $B(L_1)$ 或 $B(L_2) \neq \{0,1\}$（这里 0,1 自然是指的 L_1 或 L_2 的最小元和最大元）时，我们可以继续上面的讨论，直到 $L \cong L_1 \times L_2 \times \cdots \times L_n$（对某个 n）使得对每个 $i = 1,2,\cdots,n$ 都有 $B(L_i) = \{0,1\}$，即 L 是有限个有限稠格的直积．条件的必要性得证．

条件的充分性是明显的．】

§3. 广义 Stone 代数.

设 L 是 p 代数，对 $x_1,\cdots,x_n \in L$，考虑下列等式：

$$(E_n)\quad (x_1\wedge\cdots\wedge x_n)^*\vee\bigvee_{i=1}^{n}(x_1\wedge\cdots\wedge x_i^*\wedge\cdots\wedge x_n)^*=1.$$

当 n=1 时，上式成为 $x_1^*\vee x_1^{**}=1$，这正是确定 S 代数和 Stone 代数的那个等式. 因此我们引入以下概念.

定义 1. 满足等式 (E_n) 的 p 代数称为 **n 阶的广义 S 代数**. 分配的广义 S 代数称为**广义 Stone 代数**.

广义的 Stone 代数有类似于 Stone 代数的某些特征性质. 我们先建立一个引理.

引理 2. 对有界分配格 L，以下条件等价：

(i) L 的每个素理想最多包含 n 个不同的极小素理想，

(ii) L 的每个素漏斗最多包含在 n 个极大真漏斗中，

(iii) L中任意n+1个极小素理想的并(格运算)都是L.

证明. (i) ⇔ (ii) 与定理 2.4 的证明类似. 从略.

(i) ⇒ (iii). 假设 (i) 成立. 如果 (iii) 不成立，有 n+1 个不同的极小素理想 $P_1,\cdots,P_{n+1}$ 使 $P_1\vee\cdots\vee P_{n+1}\neq L$. 根据 Stone 引理，有素理想 P 包含 $P_1\vee\cdots\vee P_{n+1}$. 这与条件 (i) 相矛盾.

(iii) ⇒ (i). 设 (iii) 已成立，但 (i) 不成立. 于是有素理想 P 包含 n+1 个不同的极小素理想 $P,\cdots,P_{n+1}$. 从而有 $P_1\vee\cdots\vee P_{n+1}\subseteq P$, $P_1\vee\cdots\vee P_{n+1}\neq L$，与 (iii) 成立的前提矛盾. ∎

定理 3. 分配的 p 代数 L 是 n 阶广义 Stone 代数的充要条件是引理 2 的三个条件中有任意一个成立.

证明． 只需对三者之一证明定理，我们考虑条件 (ii).

设 L 为一 n 阶广义 Stone 代数，但对 L 条件 (ii) 不成立． 我们来推出一个矛盾． 事实上，这时有素漏斗 F 和包含它的 n + 1 个不同的极大真漏斗 $M_1, \cdots, M_{n+1}$ 存在．我们来证明，对 $i = 1, \cdots, n + 1$，有 $\bigcap_{j \neq i} M_j \subsetneq M_i$． 事实上，如果有 $\bigcap_{j \neq i} M_j \subseteq M_i$，则由漏斗格 $F(L)$ 的分配性（与理想格同）和 M_i 的极大性，我们将有

$M_i = M_i \vee \bigcap_{j \neq i} M_j = \bigcap_{j \neq i} (M_i \vee M_j) = L$，这当然不可能． 因此对每个 $i = 1, \cdots, n$，有元

$$a_i \varepsilon \bigcap_{j \neq i} M_j - M_i.$$

从而对 $i = 1, \cdots, n$，有

$$a_i^* \varepsilon M_i.$$

连同

$$a_i \varepsilon M_j \quad (i \neq j, i = 1, \cdots, n, j = 1, \cdots, n + 1),$$

我们得到

$$a_1 \wedge \cdots \wedge a_n \varepsilon M_{n+1}, \quad a_1 \wedge \cdots \wedge a_i^* \wedge \cdots \wedge a_n \varepsilon M_i$$
$$(i = 1, \cdots, n).$$

由于 $F \subseteq M_i (i = 1, \cdots, n + 1)$，我们有

$$(a_1 \wedge \cdots \wedge a_n)^* \bar{\varepsilon} F, (a_1 \wedge \cdots \wedge a_i^* \wedge \cdots \wedge a_n)^* \bar{\varepsilon} F$$
$$(i = 1, \cdots, n).$$

从而

$$(a_1 \wedge \cdots \wedge a_n)^* \vee \bigvee_{i=1}^{n} (a_1 \wedge \cdots \wedge a_i^* \wedge \cdots \wedge a_n) \bar{\varepsilon} F,$$

因为 F 是素漏斗．但 $1 \varepsilon F$，故 (E_n) 不成立，与假设相矛盾，从而定理的条件是必要的．

反过来，设条件 (ii) 成立但 L 不是 n 阶广义 Stone 代数．于是有元 $a_1, \cdots, a_n \varepsilon L$ 使

$$a=(a_1\wedge\cdots\wedge a_n)^*\vee\bigvee_{i=1}^{n}(a_1\wedge\cdots\wedge a_i^*\wedge\cdots\wedge a_n)^*<1.$$

根据Stone引理,有素漏斗F不包含元a.令

$$b_{n+1}=a_1\wedge\cdots\wedge a_n$$

$$b_i=a_1\wedge\cdots\wedge a_i^*\wedge\cdots\wedge a_n, i=1,\cdots,n.$$

当 $i\neq j$ 时显然有 $b_i\wedge b_j=0$. 令 $M_i=F\vee[b_i), i=1,\ldots,n+1$. 我们有 $b_j\bar{\varepsilon} M_i(j\neq i$ 时), 因为否则有 $0=b_i\wedge b_j\varepsilon M_i$, 从而将有 $b\bar{\varepsilon} F$ 使 $b\wedge b_i=0, b\leqslant b_i^*$. 但按定义有 $b_i^*\leqslant a$, 又 F 是漏斗, 我们就得出了 $a\varepsilon F$ 与 F 的本性相矛盾. 因此我们知道对一切 $i=1,\cdots,n+1, M_i$ 都是真漏斗了. 同样由于 $b_j\bar{\varepsilon} M_i(j\neq i)$, 每两个 M_i 都互不相同. 剩下只需证明它们都是极大真漏斗就行了. 如果有一个 M_i 不是极大真漏斗, 根据 Stone 引理, 我们可找到一个包含它的极大真漏斗来代替它(仍记作 M_i). 于是 $M_i\, i=1,\cdots,n+1$ 是包含 F 的 $n+1$ 个互不相同的极大真漏斗, 这自然是不可能的. ▌

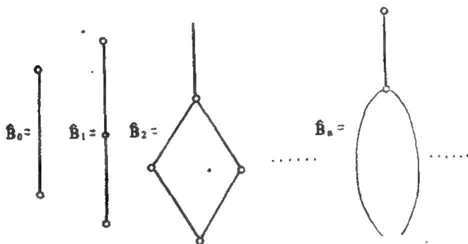


图 46

现在我们考虑一组典型的广义 Stone 代数. 设 B

$=(B;\vee,\wedge,',0,e)$ 是一个 Boole 代数．这里我们有意识地把 B 中的单位元记作 e．由 B 出发我们定义一个分配的 p 代数如下：令 $\hat{B}=B\cup\{1\}$．在 $\hat{B}$ 中我们规定对一切 $x\in B$ 有 $x<1$，B 中元的序关系不变．在 $\hat{B}$ 中我们定义一个伪补运算：

$$x^{*}=\begin{cases}x' & (当 0\neq x\in B 时)\\ 1 & (当 x=0 时),\\ 0 & (当 x=1 时).\end{cases}$$

容易验证 $\hat{B}=(\hat{B};\ \vee,\wedge,*,0,1)$ 是一个分配的 p 代数．

特别当 $B=B_n$ 是具有 n 个原子的 Boole 代数时，我们得到上页图 46 所示的一串分配 p 代数．可以证明它们是一串广义 Stone 代数．为此，我们考虑广义 Stone 代数的下列等价条件．

定理 4． **对分配的 p 代数 L，以下条件等价：**

(i) L 是 n 阶的广义 Stone 代数，

(ii) 对一切 $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n\in L$ 有

$$x_i\wedge x_j=0(i\neq j;\ i,j=0,1,\cdots,n)$$
$$\Rightarrow x_0^{*}\vee x_1^{*}\vee\cdots\vee x_n^{*}=1.$$

(iii) 对一切 $x_0,x_1,\cdots,x_n\in B(L)$ 有

$$x_i\wedge x_j=0(i\neq j;\ i,j=0,1,\cdots,n)$$
$$\Rightarrow x_0^{*}\vee x_1^{*}\vee\cdots\vee x_n^{*}=1.$$

证明． (i) ⇒ (ii)．由 $x_i\wedge x_j=0, i\neq j, i,j=0,1,\cdots,n$ 知道 $i\neq j, i,j=0,1,\cdots,n$ 时总有 $x_i\leqslant x_j^{*}$．从而有 $x_0\leqslant x_1^{*}\wedge\cdots\wedge x_n^{*}, x_1\leqslant x_0^{*}\wedge x_2^{*}\wedge\cdots\wedge x_n^{*},\cdots,x_n\leqslant x_1^{*}\wedge\cdots\wedge x_{n-1}^{*}\wedge x_0^{*}$．由于 L 是 n 阶广义 Stone 代数，对 $x_1^{*}\cdots,x_n^{*}$ 用关系 (E_n) 得到

$$x_0^{*}\vee x_1^{*}\vee\cdots\vee x_n^{*}$$

$$\geqslant (x_1^* \wedge \cdots \wedge x_n^*)^*$$

$$\vee \bigvee_{i=1}^{n} (x_1^* \wedge \cdots \wedge x_i^{**} \wedge \cdots \wedge x_n^*)^* = 1.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii). 显然.

(iii) $\Rightarrow$ (i). 设$x_1, \cdots, x_n \in L$是任意n个元. 令

$$y_0 = x_1 \wedge \cdots \wedge x_n, y_i = x_1 \wedge \cdots \wedge x_i^* \wedge \cdots \wedge x_n$$

$$(i = 1, \cdots, n)$$

很明显，当 $i \neq j, i, j = 0, 1, \cdots, n$ 时有 $y_i \wedge y_j = 0$. 于是有 $y_i^{**} \wedge y_j^{**} = (y_i \wedge y_j)^{**} = 0$. 由于 $y_i^{**} \in B(L), i = 0, 1, \cdots, n$, 由 (iii) 得出

$$y_0^* \vee y_1^* \vee \cdots \vee y_n^* = y_0^{***} \vee y_1^{***} \vee \cdots \vee y_n^{***} = 1.$$

这就是 (E_n), 故 L 是 n 阶广义 Stone 代数． ▌

现在我们可以证实$\hat{B}_n$是广义 Stone 代数了． 我们有

定理 5. **对一切 $m \leqslant n$, $\hat{B}_m$ 是 n 阶广义 Stone 代数．**

证明． 由于$\hat{B}_m$中除 1 外每个元都是 m 个原子的一部分的并． 当 $m \leqslant n$ 时，$\hat{B}_m$ 中不可能有 $n+1$ 个两两不相交的非零元． 因此满足条件 $x_i \wedge x_j = 0 (i \neq j, i, j = 0, 1, \cdots, n)$ 的任一组元 $x_i \in \hat{B}_m$ 中，至少有一个 $x_i = 0$, 从而 $x_i^* = 1$ 当然更有 $x_0^* \vee x_1^* \vee \cdots \vee x_n^* = 1$, 故由定理 4, $\hat{B}_m$ 是一个 n 阶广义 Stoone 代数． ▌

作为本节的结束，我们给出下面的定理，它把一般分配 p 代数和上述典型的广义 Stone 代数联系在一起．

定理 6. **设 L 是一个分配的 p 代数，则 L 到$\hat{B}_n$的（代数的）满同态与 L 中的漏斗序列 $(F; M_1, \cdots, M_n)$ 成一一对应． 这里 F 是素漏斗，$M_1, \cdots, M_n$ 是真包含 F 的全部互异的极大真漏斗．**

证明． 设 $(F; M_1, \cdots, M_n)$ 是定理所说的一个漏斗序

列，我们定义一个映射 $\varphi: L \to \hat{B}_n$ 如下：

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & (x \varepsilon F)\\ \bigvee\{p_i \mid x \varepsilon M_i\} & (x \bar{\varepsilon} F)\end{cases}$$

这里 $p_i(i=1,\cdots,n)$ 是$\hat{B}_n$ 的 n 个互异的原子． 我们证明 φ 是从 L 到$\hat{B}_n$ 的一个满代数同态．

先证明对任意 $x,y \varepsilon L$ 有 $\varphi(x \vee y)=\varphi(x)\vee\varphi(y)$. 由于 F 是素漏斗，$\varphi(x \vee y)=1$ 时等式显然成立． 因此考虑 $\varphi(x \vee y) \leqslant c$ 的情形． 这时 $x \vee y \bar{\varepsilon} F$, 从而有 $x,y \bar{\varepsilon} F$, 于是有

$$\begin{aligned}\varphi(x)\vee\varphi(y) &= \bigvee\{p_i \mid x \varepsilon M_i\}\vee\bigvee\{p_i \mid y \varepsilon M_i\}\\ &= \bigvee\{p_i \mid x \varepsilon M_i \text{或} y \varepsilon M_i\}\\ &= \bigvee\{p_i \mid x \vee y \varepsilon M_i\}=\varphi(x \vee y),\end{aligned}$$

因为 M_i 也是素漏斗．

由于 Boole 代数的原子集是一个无关集，不难证明还有等式 $\varphi(x \wedge y)=\varphi(x)\wedge\varphi(y)$(留作习题)，从而 φ 是一个格同态． $\varphi(0)=0,\varphi(1)=1$ 显然． 我们来证明 $\varphi(x^*)=(\varphi(x))^*$.

当 $x \varepsilon F$ 时有 $x \varepsilon M_i(i=1,\cdots,n)$. 这时有 $x^* \bar{\varepsilon} M_i(i=1,\cdots,n)$, 从而有 $\varphi(x^*)=0=1^*=(\varphi(x))^*$ 如果对一切 $i=1,\cdots,n$ 都有 $x \bar{\varepsilon} M_i$, 则必有 $x^* \varepsilon F$. 事实上，如果 $x^* \bar{\varepsilon} F$, 则对一切 $a \varepsilon F$ 都有 $a \not\leqslant x^*$, 从而有 $a \wedge x \neq 0$. 于是 $F \vee [x]$ 是一个真漏斗． 设 M 是包含 $F \vee [x]$ 的极大真漏斗． 由于 M 包含 x, 它又与所有 $M_i(i=1,\cdots,n)$ 都不同，这不可能． 故确有 $x^* \varepsilon F$. 于是 $\varphi(x^*)=1=0^*=(\varphi(x))^*$. 剩下的情形是 $x \varepsilon M_i - F$ 对某些 i 成立（可

以对全部 i 成立). 由于当 $0 \leqslant y \leqslant c$ 时,在 $\hat{B}_n$ 中 y 的伪补就是 y 在 B_n 中的补元,它是所有 $\not\leqslant y$ 的原子的并, 因此我们也有

$$(\varphi(x))^* = (\bigvee\{p_i \mid x \varepsilon M_i\})^* = \bigvee\{p_i \mid x \bar{\varepsilon} M_i\}$$
$$= \bigvee\{p_i \mid x^* \varepsilon M_i\} = \varphi(x^*)$$

这就证明了 φ 是一个 p 代数同态.

下面我们来证明 φ 是满的. 任取 $a \varepsilon \hat{B}_n$. 当 $a = 0$ 或 1 时,我们已有 $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1$. 因此只需考虑 $0 < a < 1$ 的情形. 显然不妨设 $n \geqslant 1$. 当 $a = c$ 时,对每个 $i = 1,\cdots,n$ 取一个 $x_i \varepsilon M_i$ 并令 $x = \bigvee_{i=1}^n x_i$, 显然有 $\varphi(x) = c$. 当 $0 < a < c$ 时,有 p_i, p_j 使 $p_i \leqslant a$ 但 $p_j \not\leqslant a$. 由于对一切满足条件 $p_j \not\leqslant a$ 的 j 都有 $\bigcap\{M_i|p_i \leqslant a\} \subsetneqq M_j$. 对这种 j 取 $x_j \varepsilon \bigcap\{M_i \mid p_i \leqslant a\} - M_j$, 令 $x = \bigwedge\{x_j \mid p_j \not\leqslant a\}$, 我们得到

$$\varphi(x) = \bigvee\{p_j \mid x \varepsilon M_j\} = \bigvee(p_j \mid p_j \leqslant a) = a,$$

故 φ 是满同态.

反过来,设已知 $\varphi: L \to \hat{B}_n$ 是一个(代数的)满同态. 令 $F = \varphi^{-1}(1), M_i = \varphi^{-1}([p_i)) = \{x \varepsilon L \mid \varphi(x) \geqslant p_i\}, i = 1,\cdots,n$. 很明显,F 是素漏斗又对每个 $i = 1,\cdots,n, M_i$ 是真包含 F 的真漏斗.

我们证明 M_i 还是极大漏斗. 先证明有 $D(L) \subseteq M_i$. 事实上,如有 $a \varepsilon D(L) - M_i$, 则 $\varphi(a) \not\geqslant p_i$. 从而 $\varphi(a) \wedge p_i = 0$. 由此可见,$\varphi(a) \neq 1, c$. 于是有 $(\varphi(a))^* = (\varphi(a))'$, $(\varphi(a))^* \vee p_i^* = (\varphi(a))' \vee p_i' = (\varphi(a) \wedge p_i)' = c$. 但 φ 是代数同态,我们有 $(\varphi(a))^* = \varphi(a^*) = \varphi(0) = 0$. 这样得出 $p_i^* = c$. 这不可能. 故有 $D(L) \subseteq M_i$. 现在假

定 M_i 不是极大漏斗，有素漏斗 $N \supset M_i$. 取元 $x \varepsilon N - M_i$. 由于 $x \bar{\varepsilon} L - N$, 有 $x^* \varepsilon L - N$ 即 $x^* \bar{\varepsilon} N$. 当然更有 $x^* \bar{\varepsilon} M_i$. 由于 M_i 是素漏斗，有 $x \vee x^* \bar{\varepsilon} M_i$. 但 $x \vee x^* \varepsilon D(L)$, 这与已知结论 $D(L) \subseteq M_i$ 相矛盾. 这说明 M_i(对每个 $i = 1,\cdots,n$) 都是极大漏斗. 由于对不同 i, M_i 显然互不相同. 要证明 $(F;M_1,\cdots,M_n)$ 是定理所说的那种漏斗序列，我们只要再说明：除 M_i 外再没有其它真包含 F 的极大真漏斗就行了. 事实上，如果还有极大真漏斗 M 不同于一切 $M_i(i = 1,\cdots,n)$ 并且真包含 F. 对每个 $i = 1,\cdots,n$ 有 $a_i \varepsilon M_i - M$. 令 $a = a_1 \vee \cdots \vee a_n$, 则 $a \varepsilon M_i, a \bar{\varepsilon} M$ $(i = 1,\cdots,n)$, 从而有 $a^* \bar{\varepsilon} M_i$ $(i = 1,\cdots,n)$, $\varphi(a^*) \not\geqslant p_i$ $(i = 1,\cdots,n)$. 于是只能有 $\varphi(a^*) = 0$. 但 $\varphi(a^*) = (\varphi(a))^*$, 故有 $\varphi(a) = c$ 或 1, $a \varepsilon \varphi^{-1}([c))$. 由于 M 是真包含 F 的漏斗，$\varphi^{-1}([c)) \subseteq M$, 于是有 $a \varepsilon M$. 这个矛盾证明了不存在不同于 M_i 的其它 M.

很明显，在上述构造中，对应于不同的满同态 φ, 得到的漏斗序列 $(F;M_1,\cdots,M_n)$ 是不同的. 现在我们再从这些漏斗序列出发，来考虑证明前段中所得到的同态 φ_1(为不致混淆计暂记作 φ_1). 当 $x \varepsilon F$ 时有 $\varphi_1(x) = 1 = \varphi(x)$. 设 $x \bar{\varepsilon} F$, 我们也有

$$\varphi_1(x) = \bigvee\{p_i \mid x \varepsilon M_i\} = \bigvee\{p_i \mid \varphi(x) \geqslant p_i\} = \varphi(x).$$

就是说 $\varphi_1 = \varphi$. 由此定理全部得证. 】

§4. Stone代数的三元组结构

设 L 是一个 Stone 代数. 我们已知 $D(L)=\{a\varepsilon L \mid a^*=0\}$是一个有单位元 1 的分配格,$B(L)=\{a^* \mid a\varepsilon L\}=\{a\varepsilon L \mid a=a^{**}\}$是一个 Boole 代数并且是 L 的子代数. 相对于 L,它们是比较简单的代数结构. 尤其是 B(L)它具有良好的性质. 由于对任意元 $x\varepsilon L$,我们有

$$x=x\vee 0=x\vee(x^{**}\wedge x^*)=x^{**}\wedge(x\vee x^*),$$

这里 $x^{**}\varepsilon B(L)$,$x\vee x^*\varepsilon D(L)$. 等式说明每个元 $x\varepsilon L$ 都可以表作 $x=a\wedge d$,$a\varepsilon B(L)$,$d\varepsilon D(L)$,的形式. 这使我们想到是否能用比较简单的 B(L)和 D(L),把 Stone 代数 L 刻划出来? 简单的例子说明这是不行的,图 47 所示的两个 Stone 代数有相同的 B(L)和 D(L),但彼此并不同构.

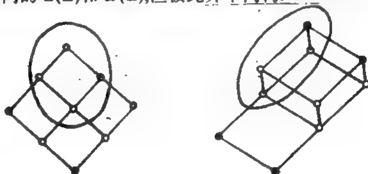


图 47

1969 年,C.C.Chen 和 G.Gratzer 指出,如果再知道 B(L)与 D(L)之间的一个关系,则 L 就可以得到完全的刻划. 它们给出的关系是一个格同态 $\varphi(L)$: $B(L)\to F(D(L))$,这里

$\varphi(L)(a)=\{x\varepsilon D(L) \mid x\geqslant a^*\}=D(L)\cap[a^*)$, $(a\varepsilon B(L))$.他们证明了以下定理.

定理 1. 设 L 是 Stone 代数,则

(i) B(L)是Boole代数,

(ii) D(L)是有单位元1的分配格,

(iii) $\varphi(L)$是从B(L)到$F(D(L))$的一个把0映射成0,1映射成1的格同态(今后简称{0,1}格同态)

(iv) 三元组{B(L),D(L),$\varphi(L)$}在同构的范围内刻划了L.

证明. (i),(ii)已知.

对于(iii),$\varphi(L)(0)=[1)$,$\varphi(L)(1)=D(L)$显然,而[1)和 D(L)分别是 $F(D(L))$的零元和单位元. 要证明 $\varphi(L)$是格同态,就是要求有

$$D(L)\cap[(a\vee b)^{*})=(D(L)\cap[a^{*}))\vee(D(L)\cap[b^{*})),$$

$$D(L)\cap[(a\wedge b)^{*})=(D(L)\cap[a^{*}))\wedge(D(L)\cap[b^{*}))$$

由于 $F(D(L))$是分配格,又$(a\vee b)^{*}=a^{*}\wedge b^{*}$,$(a\wedge b)^{*}=a^{*}\vee b^{*}$并且$[a^{*})\vee[b^{*})=[a^{*}\wedge b^{*})$,$[a^{*})\wedge[b^{*})=[a^{*}\vee b^{*})$,上述等式明显成立.

对于(iv),需要作较细致的讨论.

我们先把 L 中的元加以分类. 考虑下式确定的二元关系~:

$$x\sim y \Leftrightarrow x^{**}=y^{**} \quad (x,y\in L)$$

不难验证,~是 Stone 代数 L 的一个同余关系,并且有

$$L/\sim\cong B(L).$$

在映射 $x\to x^{**}$下,B(L)是 L 的同态像. 在 L 关于~的每个同余类中有 B(L)中唯一一个元,并且这个元是这个同余类中的最大元(因为当 $x^{**}=a\in B(L)$时,总有 $x\leqslant x^{**}=a$). 故同余关系~把 L 分成一些同余类$\{F_a \mid a\in B(L)\}$,这里

$$F_a=\{x\in L \mid x^{**}=a\},\ (a\in B(L)).$$

图 48 是这种分类的一个示意图:

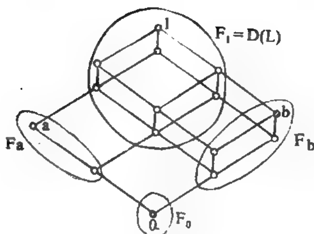


图 48

注意到 $x \in F_1$ 的充要条件是 $x^*=0$,即总有 $F_1=D(L)$. 又显然有 $F_0=\{0\}$. 我们考虑映射

$$x \to x \vee a^*.$$

当 $a \in B(L), x \in F_a$ 时,由于 a^* 是 a 的补元,容易证明映射把 F_a 映射到 D(L),并且是一个格同态(F_a 是一个子格显然). 事实上,它还是一个格同构,因为当 $x,y \in F_a$ 时有 $x,y \leqslant a$,故有 $x \wedge a^* = y \wedge a^* = 0$. 如果还有 $x \vee a^* = y \vee a^*$,则由 L 的分配性知道 $x=y$. 这样我们就知道 $x \to x \vee a^*$ 是 F_a 到 D(L)的一个嵌入.

现在我们进一步证明 $x \to x \vee a^*$ 把 F_a 映射成 $\varphi(L)(a)$. 当 $x \in F_a$ 时,显然有 $x \vee a^* \in \varphi(L)(a)$. 任取元 $z \in \varphi(L)(a)$,有 $z \in D(L)$ 并且 $z \geqslant a^*$. 从而 $z = z \wedge (a \vee a^*) = (z \wedge a) \vee a^*$,这里 $(z \wedge a)^{**} = z^{**} \wedge a^{**} = a^{**} = a$,即 $z \wedge a \in F_a$. 故 $\varphi(L)(a)$ 的任意元都是 F_a 中元的像. 这样一来,$x \in F_a$ 就完全由 $x^{**}=a$ 和 $x \vee a^* \in \varphi(L)(a)$ 确定了. 因此,对每个 $x \in L$,我们可以唯一地给它对应一个序对(a,z),$a = x^{**} \in B(L), z = x \vee a^* \in \varphi(L)(a)$. 就是说,L 中的元由 B(L),D(L)和 $\varphi(L)$完全确定了.

如果我们还能证明 L 中的顺序关系也能由三元组 $(B(L),D(L),\varphi(L))$完全确定,则作为 Stone 代数的 L 就完全由这个三元组确定了. 为此,我们考虑 L 中任意两个可比元 x,y 并设有 $x\leqslant y$. 于是有 $a,b\in B(L)$使 $x\in F_a,y\in F_b$. 由 $x\leqslant y$ 推知 $x^{**}\leqslant y^{**}$,即 $a\leqslant b$. 由于显然有

$$x\leqslant y \Leftrightarrow x\vee a\leqslant y\vee a \text{ 并且 } x\vee a^*\leqslant y\vee a^*,$$

其中右端第一个不等式总成立,因为 $x\vee a=a\leqslant y\vee a$. 因此我们得到了在 L 中

$$x\leqslant y \Leftrightarrow a\leqslant b \text{ 并且 } x\vee a^*\leqslant y\vee a^*,$$
$$(a=x^{**},b=y^{**}).$$

前面我们已经知道,x,y 可以和序对$(a,x\vee a^*)$和$(b,y\vee b^*)$等同看待. 如果上式右端的 $y\vee a^*$是 $y\vee b^*$,则 L 中的顺序关系也就由 B(L)和 D(L)的顺序确定了. 现在问题是,出现的是 $y\vee a^*$而不是 $y\vee b^*$. 我们有必要用三元组通过 $y\vee b^*$把 $y\vee a^*$确定地表示出来.

我们进一步考虑同态 $\varphi(L)$: $B(L)\to F(D(L))$. 它是$\{0,1\}$同态又 $a,a^*\in B(L)$互补,$\varphi(L)(a),\varphi(L)(a^*)$在 $F(D(L))$中互补,从而 $\varphi(L)(a)\vee\varphi(L)(a^*)=D(L)$. 故 D(L)中任意元 z 有表达式 $z=z_1\wedge z_2$,其中 $z_1\in\varphi(L)(a),z_2\in\varphi(L)(a^*)$. 不难验证,这种表示法是唯一的. 事实上,$z=z\vee(a^*\wedge a)=(z\vee a^*)\wedge(z\vee a)$就是这样一种表达式. 对任意其它表达式 $z=z_1\wedge z_2$,由于 $z_1\geqslant a^*,z_2\geqslant a$ 有 $z\vee a^*=(z_1\vee a^*)\wedge(z_2\vee a^*)=z_1\vee a^*=z_1,z\vee a=z_2$. 既然表示法是唯一的,我们可以定义一个映射 ρ_a: $D(L)\to\varphi(L)(a)$使 $\rho_a(z)=z\vee a^*(z\in D(L)$. ρ_a 完全由三元组$(B(L),D(L),\varphi(L)$确定. 由于 $a,b\in B(L)$又 $a\leqslant b$ 时,有 $y\vee a^*=(y\vee b^*)\vee a^*=\rho_a(y\vee b^*)$. 于是当 $x\in F_a,y\in F_b$ 时,我们有

$$x \leqslant y \Leftrightarrow a \leqslant b \quad 并且\ x \vee a^{*} \leqslant \rho_{a}(y \vee b^{*}).$$

这证明了 L 的顺序关系也由三元组(B(L),D(L),φ(L))完全确定,定理于是证完. 】

§5. Stone 代数的次直表示

在§2中,我们已看到有限 Stone 代数可以表示成一些更简单的 Stone 代数(稠格)的直积. 现在我们来对一般 Stone 代数做同样的事. 不过我们只能得到所谓次直表示. 先引进几个概念.

回顾一下直积的概念. 设$\{L_{\lambda} \mid \lambda \in \Lambda\}$是一族格. 直积$\Pi_{\lambda \in \Lambda} L_{\lambda}$的元 f 是从 Λ 到$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} L_{\lambda}$满足条件$f(\lambda) \in L_{\lambda} (\lambda \in \Lambda)$的映射. 在$\Pi_{\lambda \in \Lambda} L_{\lambda}$中,格运算是按坐标定义的. 就是说对$f, g \in \Pi_{\lambda \in \Lambda} L_{\lambda}$,有

$$(f \vee g)(\lambda) = f(\lambda) \vee g(\lambda),\ (f \wedge g) = f(\lambda) \wedge g(\lambda),\ (\lambda \in \Lambda).$$

很明显,对每个$\lambda \in \Lambda$,L_{λ}都与$\Pi_{\lambda \in \Lambda} L_{\lambda}$的一个子格同构,并且每个$L_{\lambda}$都是$\Pi_{\lambda \in \Lambda} L_{\lambda}$的同态像,事实上是在映射

$$\pi_{\lambda}(f) = f(\lambda) \qquad (f \in \Pi_{\lambda \in \Lambda} L_{\lambda})$$

下的同态像. 这个满同态π_{λ}: $\Pi_{\lambda \in \Lambda} L_{\lambda} \to L_{\lambda}$称为直积$\Pi_{\lambda \in \Lambda} L_{\lambda}$的第 λ 投影. f(λ)将简记为$f_{\lambda}$,并称为元$f \in \Pi_{\lambda \in \Lambda} L_{\Lambda}$的第 λ 坐标.

由于直积的格运算是按坐标定义的,不难验证,直积有某种格特性的充要条件是对每个$\lambda \in \Lambda$,L_{λ}都有这种特性. 例如直积有最小元,有最大元,或某格等式在其中成立(特别它是分配格或模格)的充要条件是每个L_{λ}都有最小元,有最大元或这个格等式在每个L_{λ}中成立.

当直积$\Pi_{\lambda \in \Lambda} L_{\lambda}$有最小元 0 时(很明显,这个 0 元的第 λ

坐标 0_λ 是 L_λ 的最小元),也不难验证 $\Pi_{\lambda\varepsilon\Lambda}L_\lambda$ 是 p 代数或 S 代数的充要条件是每个 L_λ 都是 p 代数或 S 代数. 并且,这时对每个 $\lambda\varepsilon\Lambda$ 有

$$(\Gamma^*)_\lambda=(\Gamma_\lambda)^*.$$

一句话,作为 p 代数或 S 代数的直积 $\Pi_{\lambda\varepsilon\Lambda}L_\lambda$,其一元运算 * 和零元运算即认定最小元 0 和最大元 1,也都是按坐标进行的(单位元 1 的第 λ 坐标 1_λ 是 L_λ 的单位元).

现在我们考虑一个非单元格 L.

定义 1. 序对($\{L_\lambda|\lambda\varepsilon\Lambda\},\varphi$)称为格 L 的一个次直表示,如果$\{L_\lambda\mid\lambda\varepsilon\Lambda\}$是一个格族,$\varphi$ 是从 L 到直集 $\Pi_{\lambda\varepsilon\Lambda}L_\lambda$ 的一个格同构,并且对每个 $\lambda\varepsilon\Lambda$,

$$\phi_\lambda=\pi_\lambda\varphi:\ L\to L_\lambda$$

都是满同态. φ_λ 称为次直表示($\{L_\lambda\mid\lambda\varepsilon\Lambda\},\varphi$)的第 λ φ 投影.

如果格 L 有一个次直表示($\{L_\lambda|\lambda\varepsilon\Lambda\},\varphi$),则我们说格 L 是格族$\{L_\lambda\mid\lambda\varepsilon\Lambda\}$的一个次直积.

当 L 是$\{L_\lambda\mid\lambda\varepsilon\Lambda\}$的直积时,它当然是它的次直积. 但反之不然. 次直表示不唯一. 下图给出三元链 C_3 两个不同的次直表示的例.

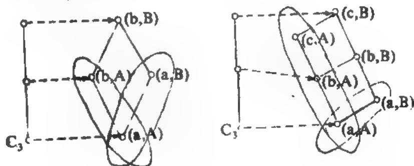


图 49

关于格的次直表示,我们有以下定理.

定理 2. 设 $(\{L_\lambda|\lambda\in\Lambda\},\varphi)$ 是格 L 的一个次直表示,$\theta_\lambda=\theta_{\varphi_\lambda}$ 是定理 I.4.6 证明中定义的由满同态 φ_λ: $L\to L_\lambda$ 导出的那个同余关系(其定义为 $a\equiv b(\theta_{\varphi_\lambda})\Leftrightarrow\varphi_\lambda(a)=\varphi_\lambda(b),a,b\in L$),则在同余关系格 $C(L)$ 中有

$$\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}\theta_\lambda=\omega.$$

反过来,如果 $\{\theta_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ 是格 L 的一族满足上述等式的同余关系,则 L 有次直表示 $(\{L/\theta_\lambda|\lambda\in\Lambda\},\varphi)$,这里对每个 $\lambda\in\Lambda$,第 λ φ 投影 φ_λ:$L\to L/\theta_\lambda$ 正好是相应的自然同态.

证明. 设 $(\{L_\lambda|\lambda\in\Lambda,\varphi\})$ 是格 L 的一个次直表示,又 θ_λ 是 φ_λ 导出的同余关系. 对 $a,b\in L$ 如果有 $a\equiv b(\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}\theta_\lambda)$,则对一切 $\lambda\in\Lambda$ 有 $a\equiv b(\theta_\lambda)$,即有 $\varphi_\lambda(a)=\varphi_\lambda(b)$,也就是 $\pi_\lambda\varphi(a)=\pi_\lambda\varphi(b)$. 按 π_λ 的定义,有 $\varphi(a)(\lambda)=\varphi(b)(\lambda)$. 就是说 $\varphi(a)=\varphi(b)$. 但 φ 是同构映射,我们得到 $a=b$. 这证明了 $\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}\theta_\lambda=\omega$.

反过来,设有 $\theta_\lambda\in C(L),\lambda\in\Lambda$,使 $\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}\theta_\lambda=\omega$. 我们定义一个映射 φ: $L\to\prod_{\lambda\in\Lambda}L/\theta_\lambda$ 如下:对每个 $a\in L$,令

$$\varphi(a)(\lambda)=a\theta_\lambda,\quad(\lambda\in\Lambda)$$

很明显,φ 保持格运算,因而是格同态. 如有 $a,b\in L$ 使 $\varphi(a)=\varphi(b)$,则对一切 $\lambda\in\Lambda$ 有 $a\theta_\lambda=b\theta_\lambda$,即对一切 $\lambda\in\Lambda$ 有 $a\equiv b(\theta_\lambda)$ 从而 $a\equiv b(\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}\theta_\lambda)$,即 $a\equiv b(\omega)$. 于是有 $a=b$,故 φ 是同构映射. 很明显,对每个 $\lambda\in\Lambda,\varphi_\lambda=\pi_\lambda\varphi$: $L\to L/\theta_\lambda$ 是

满的,并且正好把 $a \in L$ 映射成 $a\theta_\lambda$,即它是从 L 到 L/θ_λ 的自然同态. ▌

定义 3. 非单元格 L 称为是次直既约的,如果 L 的每个次直表示$(\{L_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\},\varphi)$中都至少有一个 λ φ 投影 φ_λ 是从 L 到 L_λ 的同构.

图 50 所示二元链 C_2 的次直表示中,对每个 $\lambda \in \Lambda$,φ_λ 都是同构:

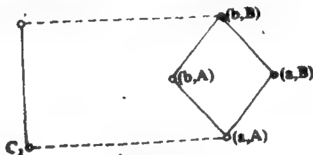


图 50

但在图 49 所示的 C_3 的两个次直表示中,右图的 φ_1 是同构,而左图中则 φ_1,φ_2 都不是同构,故按定义,三元链 C_3 不是次直既约格.

对次直既约格,我们有以下等价定义.

定理 4. 对任意格 L 以下条件等价:

(i) L 是次直既约的,

(ii) ω 是 $C(L)$的完全交既约元,即对任意 $\theta_\lambda \in C(L)$,$\lambda \in \Lambda$,当$\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}\theta_\lambda=\omega$ 时,至少有一个 $\lambda \in \Lambda$ 使 $\theta_\lambda=\omega$,

(iii) $C(L)$是稠格,

(iv) 有元 $a,b \in L$ 存在,使任何 $\theta \in C(L)$只要 $\theta\neq\omega$,就有 $a\equiv b(\theta)$.

证明. (i) $\Rightarrow$ (ii). 设格 L 是次直既约的,又 $\theta_\lambda \in C(L)$,$\lambda \in \Lambda$,有$\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}\theta_\lambda=\omega$. 根据定理 2, L 有次直表示$(\{L/\theta_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\},\varphi)$,这里 $\varphi_\lambda=\pi_\lambda\varphi$: $L\to L/\theta_\lambda$ 是自然同态

. 由于 L 次直既约,至少有一个 λ 使 φ_λ 是同构. 于是相应的 $\theta_\lambda=\omega$,即(ii)成立.

(ii) $\Rightarrow$ (iii).令 $\rho=\wedge\{\theta\in C(L)\mid\theta\neq\omega\}$. 当(ii)成立时有 $\rho\neq\omega$. 故 ρ 是不等于 ω 的最小同余关系,从而 C(L)是弱格.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) 设 ρ 是 $C(L)$中最小的非零元,有 $a,b\in L,a\neq b$ 并且 $a\equiv b(\rho)$. 对任意 $\theta\in C(L),\theta\neq\omega$ 则 $\rho\leqslant\theta$,故有 $a\equiv b(\theta)$.

(iv) $\Rightarrow$ (i).设$(\{L_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\},\varphi)$是格 L 的任意一个次直表示, θ_λ 是 φ_λ 导出的同余关系. 如果对一切 $\lambda\in\Lambda$ 都有 $\theta_\lambda>\omega$, 则由 (iv)有 $a,b\in L,a\neq b,a\equiv b\ (\theta_\lambda)$对一切 $\lambda\in\Lambda$ 成立. 于是有$\wedge_{\lambda\in\Lambda}\theta_\lambda\geqslant\theta(a,b)>\omega$ 与定理 2 矛盾. 故必有 λ 使 $\theta_\lambda=\omega$, 从而 φ_λ 是同构, 即 L 是次直既约的. 】

现在我们来给 p 代数和 S 代数的次直既约概念下定义.

定义 5. p 代数或 S 代数 L 成为是次直既约的,如果有元 $a,b\in L,a\neq b$, 使得对 L 的一切(代数的)同余关系 $\theta>\omega$ 都有 $a\equiv b(\theta)$, 也就是说,至少有两个不同元 a,b 使得 $C(L)=\omega\cup[\theta(a,b))$.

与格的情形一样, 我们有以下定理.

定理 6. **p 代数(或 S 代数) L 是次直既约的充要条件是对任意 $\theta_\lambda\in C(L),\lambda\in\Lambda$,只要$\wedge_{\lambda\in\Lambda}\theta_\lambda=\omega$ 就至少有一个 $\lambda\in\Lambda$ 使 $\theta_\lambda=\omega$.** 】

定理 7. **分配格 L 次直既约的充要条件是 $L=C_2$.**

证明. 按定义有$|L|>1$. 如果$|L|=2$, 即 $L=C_2$,它只有两个同余关系 ι 和 ω,故它是次直既约的. 如果$|L|>2$, 则 L 中有元 a,b,c, $a<b<c$. 这时必有 $\theta(a,b)\wedge\theta(b,c)=\omega$. 事

实上,当 $x\equiv y(\theta(a,b)\wedge\theta(b,c))$时,根据定理Ⅲ3.3,有 $x\vee b=y\vee b, x\wedge b=y\wedge b$,即 $x=y$. 但 $\theta(a,b)\neq\omega,\theta(b,c)=\omega$,故 L 不是次直既约的.

定理 8. 唯一的次直既约 Boole 代数是 $B_1=C_2$.

证明. 设 B 是 Boole 代数. $|B|=2$ 时问题显然. 当 $|B|>2$ 时,由于 B 的骨架是 B 本身,这时 $B\neq\{0,1\}$,如定理 2.11 的证明中所述,B 可以分解成两个 Stone 代数 $B_1\times B_2$ 的直积. 容易知道,B_1,B_2 都是非退化的 Booie 代数,从而 B 不是次直既约的. 】

定理 9. 仅有的次直既约 Stone 代数是 $B_1=C_2$ 和 C_3.

证明. C_2 显然是次直既约的 Stone 代数. 对于 C_3,不难验证它的(代数的)同余关系格仍是三元链,从而作为 Stone 代数 C_3 也是次直既约的.

反过来,如果 L 是一个次直既约的 Stone 代数. 由于 B(L)是 L 的子代数并且是 Boole 代数. 不能有$|B(L)|>2$,因为否则如定理 2.11 的证明所示,将有 $L=L_1\times L_2,|L_1|>1,|L_2|>1$,于是 L 不是次直既约的.因此只能有 $B(L)=\{0,1\}$. 于是 $L=D(L)\cup\{0\}$. 如果$|D(L)|>2$,根据定理 7,作为分配格它不是次直既约的. 于是 D(L)有非零同余关系 θ_1,θ_2 使得 $\theta_1\wedge\theta_2=\omega$ 这里 ω 是 D(L)的零同余关系. 把{0}作为一个新的同余类添加到 D(L)原来的同余分类中去,θ_1,θ_2 显然成为 L 的两个非零同余关系,并且仍有 $\theta_1\wedge\theta_2=\omega$(这里 ω 是 Stone 代数 L 的零同余关系). 故 L 不是次直既约的.

因此 Stone 代数 L 次直既约时,只能有 $L=D(L)\cup\{0\}$,其中$|D(L)|=1$ 或 2. 于是我们得到 $L=B_1(=C_2)$或 $L=C_3$. 】

现在设 L 为一 p 代数,用 $C(L)$ 记 L 的代数同余关系作成的集. 不难知道,$C(L)$ 仍构成一个格. 今后如果不作说明,对 p 代数来说,$C(L)$ 总是指的代数同余关系格. 对任意 $\theta \in C(L)$,由于 θ 保持 * 运算,$a \in L$ 时,$a^* \theta$ 由 $a\theta$ 唯一确定. 由此我们有以下定义.

定义 10. 设 L 是 p 代数,$\theta \in C(L)$,则对一切 $a \in L$,规定

$$(a\theta)^* = a^* \theta$$

得到 L/θ 中一个一元运算 *. 于是 $L/\theta = (L/\theta; \vee, \wedge, {}^*, 0\theta, 1\theta)$ 成为一个 (2,2,1,0,0) 型代数,称为 L 关于同余关系 θ 的商代数.

很明显,定义中的指定元 0θ 和 1θ 分别是 L/θ 中的最小元和最大元(读者不难证明在 L/θ 中 $a\theta \leqslant b\theta$ 的充要条件是有 $a_1 \in a\theta$, $b_1 \in b\theta$ 使 $a_1 \leqslant b_1$). 问题是定义中的一元运算 * 是否也是一个伪补运算?答案是肯定的. 就是说,我们有

定理11. L/θ 是 p 代数.

但这个定理证明较长,我们只证明以下特例.

定理 12. 当 L 是 Stone 代数时,L/θ 也是 Stone 代数.

证明. 我们来证 * 是伪补运算. $a\theta \wedge a^* \theta = 0\theta$ 显然. 设有 $a\theta \wedge b\theta = 0\theta$,我们来证有 $b\theta \leqslant a^* \theta$. 用反证法,设有 $a\theta \wedge b\theta = 0\theta$,但 $b\theta \nleqslant a^* \theta$. 于是有 $b \nleqslant a^*$. 这里我们可以假定 $b > a^*$. 因为设 $b_1 = b \vee a^*$,有 $b_1 > a^*$. 由于 $a \wedge b_1 = (a \wedge b) \vee (a \wedge a^*) = a \wedge b \equiv 0(\theta)$,

有 $a\theta\wedge b_1\theta=0\theta$. 又从 $b\leqslant b_1$ 和 $b\theta\nleqslant a^*\theta$ 知道 $b_1\theta\nleqslant a^*\theta$. 即 b_1 满足 b 所满足的一切条件而且有 $b_1>a^*$. 故我们可以一开始就假定有 $b>a^*$. 但由此就有 $b\theta>a^*\theta$(因为已知 $b\theta\nleqslant a^*\theta$), 我们证明这将导致一个矛盾.

事实上, 从 $b>a^*$ 有 $a^*\wedge b^*\leqslant b\wedge b^*=0$, 从而 $a^*\theta\wedge b^*\theta=0\theta$. 另一方面, 由 $a\wedge b\equiv 0(\theta)$ 知道 $a^*\vee b^*=(a\wedge b)^*\equiv 0^*=1(\theta)$, 即又有 $a^*\theta\vee b^*\theta=1\theta$. 故 $b^*\theta$ 是 $a^*\theta$ 在 L/θ 中的补元. 但由 L 是 Stone 代数, $a^{**}\theta$ 是 $a^*\theta$ 的补元. 于是得到 $b^*\theta=a^{**}\theta$, 从而有 $a^*\theta=b^{**}\theta\geqslant b\theta$. 这与已知 $b\theta>a^*\theta$ 相矛盾. 就是说 $a^*\theta$ 的确是 $a\theta$ 的伪补, L/θ 是一个 p 代数.

L/θ 是 Stone 代数是 L 为 Stone 代数的直接推论. 】

下述定理是本节的基本定理.

定理 13. 每个 Stone 代数都是次直既约 Stone 代数的次直积.

证明. 设 L 是 Stone 代数. 对 $a,b\in L, a\neq b$, 考虑集 $\mathcal{X}=\{\theta\in C(L)|a\not\equiv b(\theta)\}$. 由于 $\omega\in\mathcal{X}$, $\mathcal{X}\neq\Phi$. 任取 $\mathcal{X}$ 中一个链 C, 不难看出 $\bigcup C\in\mathcal{X}$, 故按 Zorn 引理, $\mathcal{X}$ 中有极大元 $\theta_{a,b}$. 根据定理 12, $L/\theta_{a,b}$ 是 Stone 代数. 我们证明它是次直既约的. 令 $u=a\theta_{a,b}, v=b\theta_{a,b}$. 由于 $a\not\equiv b(\theta_{a,b})$, 有 $u\neq v$. 考虑任意元 $\Theta\in C(L/\theta_{a,b}), \Theta>\omega$. 不难证明总有 $u\equiv v(\Theta)$. 事实上, 根据第二同构定理(即定理 Ⅰ.4.12, 它对于 p 代数的代数同余关系仍是正确

的． 证明留作习题)，有 $\varphi \varepsilon C(L), \varphi \geqslant \theta_{a,b}$ 使 $\Theta = \varphi / \theta_{a,b}$． 由于 $\Theta > \omega$，有 $\varphi > \theta_{a,b}$． 再从 $\theta_{a,b}$ 的极大性知道有 $a \equiv b(\varphi)$，从而按 $\varphi / \theta_{a,b}$ 的定义有 $u \equiv v(\Theta)$，故 $L / \theta_{a,b}$ 是次直既约的．

现在令 $\Pi = \Pi\{L / \theta_{a,b} | a,b \varepsilon L, a \neq b\}$，我们来把 L 嵌入 Π． 对任意 $x \varepsilon L$，定义 $h: L \to \Pi$ 使得 $h(x)$ 在每个 $L / \theta_{a,b}$ 上取值 $x\theta_{a,b}$． h 显然是一个代数同态．设 $x,y \varepsilon L$ 有 $h(x) = h(y)$，则对一切 $a,b \varepsilon L, a \neq b$，都有 $x\theta_{a,b} = y\theta_{a,b}$． 于是只能有 $x = y$． 因为否则将有 $x\theta_{x,y} = y\theta_{x,y}$，即 $x \equiv y(\theta_{x,y})$ 对 $x \neq y$ 成立，而这是不可能的． 故 h 为一嵌入． ．很明显 h 在每个坐标上都是满的． 这就证明了 L 是 Stone 代数族 $\{L / \theta_{a,b} \mid a,b \varepsilon L, a \neq b\}$ 的次直积． 】

定理 13 是一个泛代数的定理． 定理中的 Stone 代数换成分配格或 Boole 代数等(事实上代数的任意等式族)仍然成立．

从定理 9 立刻有

推论 14. 每个 Stone 代数都是一个由二元链 C_2 和三元链 C_3 作成的次直积．

§6. 模 p 代数与模 S 代数

本节中我们放宽条件，讨论只满足模律的 p 代数和 S 代数(简称模 p 代数和模 S 代数)．

先回顾伪补运算的一些运算规则：

(i) $a \leqslant a^{**}$，

(ii) $a \leqslant b \Rightarrow a^* \geqslant b^*$,

(iii) $a^* = a^{***}$,

(iv) $(a \vee b)^* = a^* \wedge b^*$,

(v) $(a \wedge b)^{**} = a^{**} \wedge b^{**}$,

(vi) $(a \vee b)^{**} = (a^{**} \vee b^{**})^{**}$,

(vii) $(a \wedge b)^* = a^* \vee b^*$,

(viii) $(a \vee b)^{**} = a^{**} \vee b^{**}$.

这里 (i)–(vi) 对任意 p 代数都成立. (vii) 和 (viii) 则我们只对 Stone 代数证明了它们的正确性 (关于 (viii) 见习题 6). 现在我们证明:

定理 1. 对模 S 代数 L, 也有等式 (vii) 和 (viii) 成立.

证明. $x = (a \wedge b)^* \geqslant a^* \vee b^* \geqslant a^*$ 显然. 由于 L 是模 S 代数, $x = x \wedge (a^* \vee a^{**}) = a^* \vee (x \wedge a^{**})$. 因为 $x \wedge a \wedge b = 0$, 有 $x \wedge b \leqslant a^*$, 从而 $x \wedge b \wedge a^{**} \leqslant a^* \wedge a^{**} = 0$, 即有 $x \wedge a^{**} \leqslant b^*$. 代入前式得到 $x \leqslant a^* \vee b^*$, 故 (vii) 式成立.

由(iv)和(vii),得到(viii). ▮

根据定理1,我们有和定理2.2平行的下述定理.

定理2. 对伪补模格L,以下条件等价:

(i) L是模S代数,

(ii) $(a \wedge b)^* = a^* \vee b^*$,

(iii) $a, b \in B(L) \Rightarrow a \vee b \in B(L)$,

(iv) B(L)是L的子代数. ▮

设 L 是模 p 代数. 由模性知道, $x = x \vee (x^* \wedge x^{**}) = x^{**} \wedge (x \vee x^*)$, 其中 $d = x \vee x^*$ 仍有 $d^* = 0$ 就是说 $x \in L$ 也可以表示成下列形式:

$$x = x^{**} \wedge d,$$

其中$x^{**} \in B(L)$, $d = x \vee x^{*} \in D(L)$.

对$a \in B(L)$，我们令$d_a = a \vee a^{*} \in D(L)$. 显然有$d_a = d_{a^*}$.

和§4中一样考虑同余关系～：

$$x \sim y \Leftrightarrow x^{**} = y^{**} \Leftrightarrow x^{*} = y^{*} \quad (x,y \in L)$$

不难证明～也是模p代数L的同余关系，并且有$L/\sim \cong B(L)$. 仍记$F_a = \{x \in L \mid x^{**} = a\}$, $a \in B(L)$. 我们有

定理3. 对一切$a \in B(L)$,有

$$[F_a) = \{x \in L \mid x^{**} \geqslant a\} = [a) \vee D(L)$$

证明. 由于F_a是子格又$y \geqslant x$时有$y^{**} \geqslant x^{**}$，有$[F_a) = \{x \in L \mid x^{**} \geqslant a\}$. 由于对任意$x \in L$有$x = x^{**} \wedge d, d \in D(L)$，当$x \in [F_a)$时有$x \in [a) \vee D(L)$. 反过来，如有$x \in [a) \vee D(L)$，则$x = c \wedge d, c \geqslant a, d \in D(L)$. 于是有$x^{**} = c^{**} \wedge d^{**} = c^{**} \geqslant c \geqslant a$，即$x \in [F_a)$. ▌

定理4. 设L是模p代数. 则$\varphi(L)$: $B(L) \to F(D(L))$. 这里对$a \in B(L)$，$\varphi(L)(a) = \{x \in D(L) \mid x \geqslant a^{*}\} = [a^{*}) \wedge D(L)$，是一个$\{0,1\}$并同态. 又对于任意$a \in B(L)$，有$\varphi(L)(a) \wedge \varphi(L)(a^{*}) = [d_a)$.

证明. $\varphi(L)(0) = [1)$, $\varphi(L)(1) = D(L)$显然. 需要证明的是对$a,b \in B(L)$有$\varphi(L)(a \vee b) = \varphi(L)(a) \vee \varphi(L)(b)$，也就是$[(a \vee b)^{*}) \wedge D(L) = ([a^{*}) \wedge D(L)) \vee ([b^{*}) \wedge D(L))$.

由于$[(a \vee b)^{*}) = [a^{*} \wedge b^{*}) = [a^{*}) \vee [b^{*})$. 上式是一个分配性等式：

$([a^*)\vee[b^*))\wedge D(L)=([a^*)\wedge D(L))\vee([b^*)\wedge D(L))$.

直接证明这个等式不容易. 根据定理I.6.8,我们不妨证明另一个等式

$$([a^*)\wedge[b^*))\vee D(L)$$
$$=([a^*)\vee D(L))\wedge([b^*)\vee D(L)).$$

利用定理3,这不难完成. 事实上,直接计算得到

$([a^*)\wedge[b^*))\vee D(L)=[a^*\vee b^*)\vee D(L)=[F_{a^*\vee b^*})$
$=\{x\in L \mid x^{**}\geqslant a^*\vee b^*\}=\{x\in L \mid x^{**}$
$\geqslant a^*\}\wedge\{x\in L \mid x^{**}\geqslant b^*\}=[F_{a^*})\wedge[F_{b^*})$
$=([a^*)\vee D(L))\wedge([b^*)\vee D(L))$.

于是$\varphi(L)$为一$\{0,1\}$并同态.

由于$d_a\in D(L)$又$D(L)$是漏斗,直接计算有

$$\varphi(L)(a)\wedge\varphi(L)(a^*)=[a^*)\wedge D(L)\wedge[a)\wedge D(L)$$
$$=[a\vee a^*)\wedge D(L)=[d_a)\wedge D(L)=[d_a).$$

定理于是证完. 】

当L是模S代数时,由于有等式(vii),立即有

定理 5. 当L是模S代数时,$\varphi(L)$是从L到$F(D(L))$的一个$\{0,1\}$同态. 】

定理 6. 设L是模p代数,$a\in B(L)$,又$D_a=\{x\in D(L) \mid a^*\leqslant x\leqslant d_a\}$,则映射

$$\varphi:\ x\to x\vee a^*$$

是F_a到D_a的一个同构,映射

$$\psi:\ y\to y\wedge a$$

是D_a到F_a的同构,并且有$\psi=\varphi^{-1}$

证明. 当$x\in F_a$时,有$x\leqslant a$,故有

$$\psi(\varphi(x)) = (x \vee a^*) \wedge a = x \vee (a \wedge a^*) = x$$

由于 $a \in B(L), a \vee a^* = 1$. 当 $y \in D_a$ 时, $y \geqslant a^*$, 我们又有

$$\varphi(\psi(y)) = (y \wedge a) \vee a^* = y \wedge (a \vee a^*) = y$$

于是 φ 和 ψ 都是双射并且互逆. φ 明显保持 $\vee$ 运算, 故它, 从而 ψ, 是同构映射. 》

下面是本节的主要定理.

定理 7. 模 p 代数 L 在同构的范围内由三元组 $(B(L), D(L), \varphi(L))$ 完全确定.

证明. 任取 $x \in L$ 有 $a \in B(L)$ 使 $x \in F_a$. 由于 $x = x^{**} \wedge (x \vee x^*) = a \wedge (x \vee a^*)$ 又 $x \vee a^* \in D_a \subseteq D(L)$, 我们有

$$[x) \wedge D(L) = ([a) \vee [x \vee a^*)) \wedge D(L)$$
$$= ([a) \wedge D(L)) \vee [x \vee a^*) = \varphi(L)(a^*) \vee [x \vee a^*) \in F(D(L)).$$

把 $x \in F_a$ 和序对

$$(a, \varphi(L)(a^*) \vee [x \vee a^*)) \in B(L) \times F(D(L))$$

等同起来. 我们证明当 $x \in F_a, y \in F_b$ 时有

$$x \leqslant y \iff a \leqslant b \text{并且} \varphi(L)(a^*) \vee [x \vee a^*)$$
$$\geqslant \varphi(L)(b^*) \vee [y \vee b^*).$$

上式一旦确立, 则 L 的元一方面与所说的序对成一一对应并且在对应关系下又保持顺序关系, 就是说 L 在同构的意义下由三元组 $(B(L), D(L), \varphi(L))$ 完全确定, 从而定理得到证明.

事实上, 当 $x \leqslant y$ 时, 显然有 $a \leqslant b$ 和 $\varphi(L)(a^*) \vee [x \vee a^*) = [x) \wedge D(L) \geqslant [y] \wedge D(L)$ $= \varphi(L)(b^*) \vee [y \vee b^*)$. 反过来, 由于 $x \leqslant a$ 有 $[x) \geqslant [a)$, 又 $x = a \wedge (x \vee a^*), x \vee a^* \in D(L)$, 有 $[x) = [a) \vee [x \vee a^*)$

$\leqslant [a) \vee D(L)$，由模性知道 $[x) = [x) \wedge ([a) \vee D(L)) = [a) \vee ([x) \wedge D(L))$. 从而当 $a \leqslant b$ 又 $\varphi(L)(a^*) \vee [x \vee a^*) \geqslant \varphi(L)(b^*) \vee [y \vee b^*)$ 时有

$$
\begin{aligned}
[x) &= [a) \vee ([x \wedge D(L)) = [a) \vee (\varphi(L)(a^*) \vee [x \vee a^*)) \\
&\geqslant [b) \vee (\varphi(L)(b^*) \vee [y \vee b^*)) = [b) \vee ([y) \wedge D(L))) \\
&= [y),
\end{aligned}
$$

即 $x \leqslant y$. ▮

§7. 正则的双 p 代数.

以下各节我们介绍关于双 p 代数和双 S 代数的若干基本知识. 先引人对偶伪补的概念.

定义 1. 设 $L = (L;\ \vee)$ 是一个有 1 的并半格. 如果对元 $a \in L$ 都有元 $a^+ \in L$ 使得 $a \vee x = 1 \iff x \geqslant a^+ (x \in L)$，元 a^+ 称为元 a 的对偶伪补. 如果 L 的每个元都有对偶伪补存在，则 L 称为一个对偶伪补并半格.

如果 $L = (L;\ \vee, \wedge)$ 原是一格，则我们有对偶伪补格.

和伪补交半格以及伪补格相平行，对偶伪补并半格或对偶伪补格有许多相应的性质，我们都省略不作重复的叙述了.

如果把对偶伪补格 $L = (L;\ \vee, \wedge, {}^+, 0, 1)$（和伪补格情形一样，对偶伪补格必然有界）看成一个 (2,2,1,0,0) 型代数，则我们称之为一个对偶 p 代数. 相应地，如果对偶 p 代数 L 中对每个元 a 都有等式 $a^+ \wedge a^{++} = 0$，则 L 称为对偶 S 代数. 分配的对偶 S 代数是对偶 Stone 代数.

定义 2. $(2,2,1,1,0,0)$ 型代数 $L=(L;\ \vee,\wedge,^*,^+,0,1)$ 称为一个双 p 代数，如果 $(L;\ \vee,\wedge,^*,0,1)$ 是一个 p 代数同时 $(L;\ \vee,\wedge,^+,0,1)$ 是一个对偶 p 代数.

设 $L=(L;\ \vee,\wedge,^*,^+,0,1)$ 是一个双 p 代数. 为清楚计，我们今后将把它的骨架 $B(L)$ 改记为 $B^*(L)=\{a^*\mid a\in L\}$，稠集 $D(L)$ 改记作 $D^*(L)=\{a\in L\mid a^*=0\}$；相应地，记 $B^+(L)=\{a^+\mid a\in L\}$ 和 $D^+(L)=\{a\in L\mid a^+=0\}$，分别称为 L 的对偶骨架和对偶稠集

对偶骨架 $B^+(L)$ 也作成一个 Boole 代数，如果我们规定它一个新的交运算

$$a\dot{\wedge}b=(a^+\vee b^+)^+=(a\wedge b)^{++},\quad (a,b\in B^+(L)).$$

当 L 是对偶 Stone 格时，我们有 $a\dot{\wedge}b=a\wedge b$，从而 $B^+(L)$ 是 L 的一个子代数.

对于 p 代数，我们曾经考虑过一个代数同余关系 $\overset{*}{\sim}$ (当时记作～)：

$$x\overset{*}{\sim}y\ \Leftrightarrow\ x^*=y^*\qquad (x,y\in L).$$

并且证明了 $L/\overset{*}{\sim}\cong B^*(L)$. 同样，二元关系 $\overset{+}{\sim}$：

$$x\overset{+}{\sim}y\ \Leftrightarrow\ x^+=y^+\qquad (x,y\in L)$$

也是对偶 p 代数 L 的代数同余关系并且同样有 $L/\overset{+}{\sim}\cong B^+(L)$.

我们用符号 $F_a^*=\{x\in L\mid x^{**}=a,a\in B^*(L)\}$ 来代替前面用过的符号 F_a. 相应地，有 $F_a^+=\{x\in L\mid x^{++}=a,a\in B^+(L)\}$. 很明显，相应于 $F_0^*=\{0\},F_1^*=D^*(L)$，我们有 $F_1^+=\{1\},F_0^+=D^+(L)$. $F_a^*(a\in B^*(L))$ 和 $F_a^+(a\in B^+(L))$ 分别是 L 由同余关系 $\sim^*$ 和 $\sim^+$ 确定的

同余类． 当 F_a^* 或 F_a^+ 都是单元集时，L 是一个 Boole 代数． 反过来，当 L 是 Boole 代数时，每个 F_a^* 或 F_a^+ 显然也都是单元集． 换一种说法，我们有 L 是 Boole 代数的充要条件是 $\overset{*}{\sim}=\omega$（这时 L 是 p 代数）或 $\overset{+}{\sim}=\omega$（L 是对偶 P 代数时）． 这里和过去一样，我们对 p 代数和对偶 p 代数，都用 ω 记它们的最小同余关系，这不至于引起误解． 这种办法，我们还将在其它场合采用． 除非特殊情形，我们都不再作申明．

对于双 p 代数 $L=(L;\ \vee,\wedge,{}^*,{}^+,0,1)$，我们自然会考虑二元关系 ~：

$$x\sim y \iff x^*=y^*, x^+=y^+ \qquad (x,y\in L)$$

就是说 $\sim\,=\,\overset{*}{\sim}\cap\overset{+}{\sim}$，这里 $\overset{*}{\sim}$ 和 $\overset{+}{\sim}$ 分别把双 p 代数 L 看成 p 代数和对偶 p 代数时的那两个同余关系，我们把 ~ 是双 p 代数同余关系这一并非显然的结论留作习题请读者去完成． 这里我们只指出，对于双 p 代数来说，$\sim\,=\omega$ 不再是代数成为 Boole 代数的充要条件了． 事实上，对三元链 $C_3=\{0,a,1\}$，只要规定 $0^*=1, a^*=1^*=0;\ 0^+=a^+=1, 1^+=0$，我们就得到一个双 p 代数． 它满足条件 $\sim\,=\omega$ 但不是 Boole 代数．

定义 2. 满足条件 $\sim\,=\omega$，即有性质

$$x^*=y^*, x^+=y^+ \Rightarrow x=y \qquad (x,y\in L)$$

的双 p 代数 $L=(L;\ \vee,\wedge,{}^*,{}^+,0,1)$ 称为正则的双 p 代数．

本书中我们将只着重讨论正则的双 p 代数． 正则双 p 代数的第一个性质是

定理3. 正则双P代数是分配格．

证明． 映射 $a\to a^{**}$ 是从 L 到 $B^*(L)$

$=(B^{*}(L);\ \dot{\vee},\wedge,*,0,1)$ 的一个 p 代数同态，由于 $B^{*}(L)$ 是分配的，我们有

$$
\begin{aligned}
(a\wedge(b\vee c))^{**} &= a^{**}\wedge(b^{**}\dot{\vee}c^{**}) \\
&=(a^{**}\wedge b^{**})\dot{\vee}(a^{**}\wedge c^{**}) \\
&=((a\wedge b)\vee(a\wedge c))^{**},
\end{aligned}
$$

也就是有 $(a\wedge(b\vee c))^{*}=((a\wedge b)\vee(a\wedge c))^{*}$. 类似地，可证 $(a\wedge(b\vee c))^{+}=((a\wedge b)\vee(a\wedge c))^{+}$. 从而由 L 的正则性得到 $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$. 】

现在设 L 是一个 p 代数，用下式

$$\psi^{*}(L)(x)=x^{**},\quad \psi^{+}(L)(x)=x^{++}\qquad (x\in L)$$

定义两个映射 $\psi^{*}(L): L\to B^{*}(L)$, $\psi^{+}(L): L\to B^{+}(L)$. 我们有

定理 4. (i) $\psi^{*}(L)$, $\psi^{+}(L)$ 都是 $\{0,1\}$ 格同态，

(ii) 当 L 是正则 p 代数时，$\psi^{*}(L)$, $\psi^{+}(L)$ 分别把 $F_a^{+}(a\in B^{+}(L))$ 和 $F_a^{*}(a\in B^{*}(L))$ 同构地映射成 $B^{*}(L)$ 和 $B^{+}(L)$ 中一个凸子格.

(iii) L 正则时，$D^{+}(L)$ 与 $B^{*}(L)$ 中一个理想同构; $D^{*}(L)$ 与 $B^{+}(L)$ 中一个滤斗同构.

证明. 由于 $0^{**}=0^{++}=0, 1^{**}=1^{++}=1$, $\psi^{*}(L)$ 与 $\psi^{+}(L)$ 都是 $\{0,1\}$ 映射. 对任意 $x,y\in L$, 有

$$(x\wedge y)^{**}=x^{**}\wedge y^{**},$$

$$(x\vee y)^{**}=(x^{**}\vee y^{**})^{**}=x^{**}\dot{\vee}y^{**},$$

故 $\psi^{*}(L)$ 是 $\{0,1\}$ 格同态. 同样，$\psi^{+}(L)$ 也是 $\{0,1\}$ 格同态. 于是 (i) 成立.

对于 (ii), 已知 $\psi^{*}(L)$: $F_a^{+}\to B^{*}(L)$ 是一个格同态. 设有 $x,y\in F_a^{+}$ 使 $\psi^{*}(L)(x)=\psi^{*}(L)(y)$, 则 $x^{*}=y^{*}$. 由

于 $x,y \in F_a^+$ 又有 $x^+ = y^+$. 故由 L 的正则性，知道 $x = y$. 即 $\psi^*(L)$ 是一个格同构. 同理，$\psi^+(L)$ 是 $F_a^*(a \in B^*(L))$ 到 $B^+(L)$ 的格同构.

现在我们证明 $\psi^*(L)(F_a^+)(a \in B^+(L))$ 是 $B^*(L)$ 的一个凸子格. 为此，任取元 $c \in B^*(L)$ 满足条件 $\psi^*(L)(x) \leqslant c \leqslant \psi^*(L)(y)$, $x,y \in F_a^+$, $x \leqslant y$. 令 $z = y \wedge c$. 由于 $c \geqslant \psi^*(L)(x) = x^{**}$, 我们有 $c^{++} \geqslant x^{**++} \geqslant x^{++} = a$, 从而 $a = y^{++} \geqslant y^{++} \wedge c^{++} = a \wedge c^{++} = a$. 即有 $y^{++} \wedge c^{++} = a$. 于是得到 $z^{++} = (y \wedge c)^{++} = (y^{++} \wedge c^{++})^{++} = a^{++} = a$. 这说明 $z \in F_a^+$. 计算 $\psi^*(L)(z)$. 我们有 $\psi^*(L)(z) = z^{**} = y^{**} \wedge c^{**} = \psi^*(L)(y) \wedge c = c$. $\psi^*(L)(F_a^+)$ 的凸性得到证明. 对偶地 $\psi^+(L)(F_a^*)(a \in B^*(L))$ 是 $B^+(L)$ 的凸子格. (ii) 成立.

对于 (iii), 由于 $F_1^* = D^*(L)$, $F_0^+ = D^+(L)$, (iii) 是 (ii) 的直接推论. ∎

定理 5. 设双 p 代数 L 满足条件

$$x = x^{**} \wedge (x \vee x^*) = x^{++} \vee (x \wedge x^+),$$

则以下条件等价:

(i) L是正则双p代数,

(ii) $D^*(L)$相对有补,

(iii) $D^+(L)$相对有补,

(iv) 对一切$x,y \in L$有$(x \vee x^*) \wedge (y \wedge y^+) = y \wedge y^+$.

证明. (i) ⇒ (ii),(iii) 是定理 4 的直接推论.

(ii),(iii) ⇒ (iv). 我们只证 (ii) ⇒ (iv),(iii) ⇒ (iv) 可类似的证明. 令 $d = x \vee x^*$, $t = y \wedge y^+$. 如有 $d \ngeq t$,

则 $d\vee t>d$. 我们断言这时必有 $d\vee t<1$, 因为否则 $d\vee y=1, d\geqslant y^{+}\geqslant t$, 从而有 $d\vee t=d$. 这不可能, 故有 $d<d\vee t<1$. 但由于 $d\in D^{*}(L)$, 有 $d\vee t\in D^{*}(L)$. 由 (ii) 将有 $d'\in D^{*}(L)$ 使 $d'\vee(d\vee t)=1, d'\wedge(d\vee t)=d$. 从而 $d'\vee t=d'\vee d\vee t=1, d'\geqslant t^{+}=1$,(因为 $t\in D^{+}(L)$), 得到 $d\vee t=d'\wedge(d\vee t)=d$. 这是一个矛盾. 故只能有 $d\geqslant t$, 而 (iv) 成立.

(iv) $\Rightarrow$ (i). 现在设 $x^{**}=y^{**}, x^{++}=y^{++}$. 我们来证 $x=y$. 先设 $x\leqslant y$. 按定理的条件, 我们有 $x=x^{**}\wedge(x\vee x^{*})$, $y=y^{++}\vee(y\wedge y^{+})$. 由于 (iv) 有 $y\wedge y^{+}\leqslant x\vee x^{*}$, 又 $y\wedge y^{+}\leqslant y\leqslant y^{**}=x^{**}$, $y^{++}=x^{++}\leqslant x\leqslant x\vee x^{*}$, $y^{++}=x^{++}\leqslant x\leqslant x^{**}$, 于是 $y\leqslant x$, 从而得到 $x=y$. 对于一般的 $x,y\in L$, 代替 x,y 可以考虑 $x\wedge y$ 和 $x\vee y$.

因为 $x\sim y$ 是同余关系, 我们得到 $x\wedge y=x\vee y$, 当然也有 $x=y$. 】

由于 $d\in D^{*}(L)$ 的充要条件是有 $x\in L$ 使 $d=x\vee x^{*}$, $t\in D^{+}(L)$ 的充要条件是有 $y\in L$ 使 $t=y\wedge y^{+}$, 我们有

推论 6. 在定理 5 的条件下, L 是正则双 p 代数的充要条件是 L 的每个稠元都是对偶稠子格的上界, 同时每个对偶稠元都是稠子格的下界. 特别这时如有 $D^{*}(L)\cap D^{+}(L)\neq\Phi$, 则它是一个单元集. 】

当 L 是一个模双 P 代数时, 条件

$$x=x^{**}\wedge(x\vee x^{*})=x^{++}\vee(x\wedge x^{+}),\qquad (x\in L)$$

成立，故定理 5 及其推论对模双 p 代数总是成立的．

作为本节的结束，我们讨论分配的双 p 代数的某些性质． 具体说，我们证明下述定理．

定理 7. 对于分配的双 p 代数 L, 下列条件等价:

(i) L是正则的.

(ii) $a^{++} \leqslant b \leqslant a \leqslant b^{**} \Rightarrow a = b$.

(iii) L的素理想作成的链最多只有两个元.

(iv) L的素漏斗作成的链最多只有两个元.

证明． (i) ⇒ (ii). 设 $a, b \in L$ 满足条件 $a^{++} \leqslant b \leqslant a \leqslant b^{**}$，我们来证有 $a = b$. 事实上由 $a^{++} \leqslant b \leqslant a$ 知道 $a^{+} = a^{+++} \geqslant b^{+} \geqslant a^{+}$，即 $a^{+} = b^{+}$. 同理有 $a^{*} = b^{*}$. 按 (i) 有 $x = y$.

(ii) ⇒ (iii). 我们先注意到有以下事实：对任意伪补格 L, 如果 F 是 L 的一个素漏斗，又 $F \supseteq D(L)$, 则 F 是极大漏斗． 事实上，对任意 $x \in L - F$, 我们证明必有 $y \in F$, 使 $x \wedge y = 0$. 其实只要取 $y = x^{*}$ 就行了． $x \wedge x^{*} = 0$ 不成问题． 由于 $x \vee x^{*} \in D(L) \subseteq F$, 又已知 $x \notin F$, 只能有 $x^{*} \in F$. 故 F 是极大漏斗．

现在我们假定 (iii) 不成立． 于是有 L 的三个互不相同的素理想 P_1, P_2, P_3 作成一个链． 比如说，有 $P_1 \subset P_2 \subset P_3$. 显然我们不妨设 P_1 是极小素理想，P_3 是极大素理想． 根据上面所说的事实，由于 P_2 不是极大素理想，$L - P_2$ 不是极大素漏斗，有 $b \in P_2 - P_1$ 使 $b^{*} = 0$, 又 $c \in P_3 - P_2$ 使 $c^{++} = 0$. 令 $a = b \vee c$, 我们有

$$b < a \leqslant b^{**} = 1, \quad a^{++} = (b \vee c)^{++} = b^{++} \leqslant b.$$

综合起来得到 $a^{++} \leqslant b < a \leqslant b^{**}$，即 (ii) 不成立． 故 (ii)

成立时必有 (iii).

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv)显然.

(iii) $\Rightarrow$ (i). 假定已有 (iii) 但 (i) 不成立. 于是有 $a,b\in L$ 使 $a^*=b^*, a^+=b^+$ 但 $a\neq b$. 不妨设 $a\not\geqslant b$. L 是分配格, 根据 Stone 引理, 有素理想 P 包含 a 但不包含 b. 由于 $b^{++}=a^{++}\leqslant a, b\leqslant b^{**}=a^{**}$, P 包含 b^{++} 但不包含 a^{**}.

现在我们证明 P 不可能是极小素理想. 否则由于 $a\in L-P$ 又 $L-P$ 是极大素漏斗, 有 $c\in L-P$ 使 $a\wedge c=0$, 从而 $a^{**}\wedge c^{**}=0^{**}=0$, 而这不可能, 因为 $a^{**}, c^{**}\in L-P$.

同理, P 不可能是极大素理想. 于是 L 至少有一个由三个素理想作成的链, 这是一个矛盾. 】

§8. 双 Stone 代数与 Lukasiewicz 三值代数

设 L 是一个双 p 代数. 如果对任意 $x\in L$ 都有等式

$$x^*\vee x^{**}=1,\ x^+\wedge x^{++}=0$$

成立, 则 L 是一个 S 代数同时又是一个对偶 S 代数, 我们说 L 是一个双 S 代数. 分配的双 S 代数称为双 Stone 代数. 根据定理 7.3, 正则的双 S 代数是双 Stone 代数. 正则的双 Stone 代数又称为 Lukasiewicz 三值代数.

为了研究双 Stone 代数, 我们这里再给出有界分配格成为 Stone 代数的一个特征条件.

定理 1. 有界分配格 L 是 Stone 代数的充要条件是在 L 上可以定义一个一元运算"–"使得对任意 $x,y\in L$ 有以下条

件成立:

(i) $x \leqslant \bar{x}$,

(ii) $x \leqslant y \Rightarrow \bar{x} \leqslant \bar{y}$,

(iii) $\overline{(x \wedge y)} = \bar{x} \wedge \bar{y}$,

(iv) $\bar{0} = 0$,

并且对一切$x \varepsilon L$, $\bar{x}$是有补元.

证明. 设 L 是 Stone 代数,则只要对一切 $x \varepsilon L$ 令$\bar{x} = x^{**}$,(i)－(iv) 显然成立. 又 x^* 是 x^{**} 的补元,故$\bar{x}$是有补元. 条件的必要性成立.

对于充分性,设满足定理中条件的一元运算“－”已经有了. 用符号“′”记补运算. 我们证明定义 $x^* = \bar{x}'$ 使得 L 成为一个 Stone 代数. 先证“*”是伪补运算,就是要证明有

$$x \wedge y = 0 \Leftrightarrow y \leqslant x^* = \bar{x}'$$

由于 $x \leqslant \bar{x}$(根据 (i)) 又$\bar{x} \wedge \bar{x}' = 0$, 当 $y \leqslant \bar{x}'$ 时 ,$x \wedge y \leqslant \bar{x} \wedge \bar{x}' = 0$, 反过来,当 $x \wedge y = 0$ 时,由 (iii),(iv) 有$\bar{x} \wedge \bar{y} = \bar{0}$, 即有$\bar{y} \leqslant \bar{x}'$. 当然更有 $y \leqslant \bar{x}'$. 故 x^* 确为 x 的伪补. 此外,由于

$$x^* \vee x^{**} = \bar{x}' \vee \bar{x}'^{-\prime} = (\bar{x} \wedge \bar{x}'^{-})' = (x \wedge \bar{x}')^{-\prime} = \bar{0}' = 0' = 1$$

故L是Stone代数.

定理 2. 有界分配格 L 是双 Stone 代数的充要条件是在 L 上可以定义两个逆自同态“*”和“+”使得以下条件成立:

(T1) $x^{++} \leqslant x \leqslant x^{**}$

(T2) $x^{*+} = x^{**}$

(T3) $x^{+*} = x^{++}$

(T4) $x^{++} \vee (x^{+} \wedge x^{**}) \vee x^{*} = 1$

证明. 必要性留作习题请读者证明.

关于充分性,我们先证$\bar{x} = x^{**}$满足定理1的全部条件.

由(T1)有$x \leqslant \bar{x}$,即(i)成立. 两次取$*$,由于$*$运算是逆同态,我们得到$(x \wedge y)^{**} = x^{**} \wedge y^{**}$,即$\overline{(x \wedge y)} = \bar{x} \wedge \bar{y}$,故(iii)成立. 由(iii)立即有(ii). 由(T1)我们有$\bar{1} = 1^{**} = 1$,于是有$0^{*} = (0 \wedge x)^{*} = 0^{*} \vee x^{*}$,即对任意$x$有$0^{*} \geqslant x^{*}$. 特别当$x = 1^{*}$时,有$0^{*} \geqslant 1^{**} = 1$,故$0^{*} = 1$. 类似地可以证明有$1^{+} = 0$. 根据(T2),$1^{*} = 0^{**} = 0^{*+} = 1^{+} = 0$,即$\bar{0} = 0^{**} = 0$. 这就证明了(iv). 现在我们证明$\bar{x} = x^{**}$有补. 由(T4),有

$$
\begin{aligned}
1 &= x^{++} \vee (x^{+} \wedge x^{**}) \vee x^{*} \\
&= (x^{++} \vee x^{+} \vee x^{*}) \wedge (x^{++} \vee x^{**} \vee x^{*}),
\end{aligned}
$$

从而$1 = x^{++} \vee x^{**} \vee x^{*} = x^{**} \vee x^{*}$(用了(T1)). 我们还不难证明$x^{***} = x^{*}$,故又有$x^{**} \wedge x^{*} = x^{**} \wedge x^{***} = (x^{*} \vee x^{**})^{*} = 1^{*} = 0$,这证明了$x^{*}$是$\bar{x} = x^{**}$的补元.

定理1的全部条件成立,故L是Stone代数.

类似地,可以证明L也是对偶Stone代数,从而L是双Stone代数. ▌

由定理2立刻得到G.Moisil关于Lukasiewicz三值代数的刻划:

定理 3. 有界分配格 L 是一个 Lukasiewicz 三值代数的充要条件是在 L 上有两个逆自同态“*”和“+”使得定理 2 中的条件 (T1) – (T4) 和下列正则性条件

(T5) $x^* = y^*, x^+ = y^+ \Rightarrow x = y$

成立. 】

利用定理 7.7, 我们还有下列分配双 p 代数成为 Lukasiewicz 三值代数的条件.

定理 4. 分配的双 p 代数 L 是一个 Lukasiewicz 三值代数的充要条件是它的素理想集 $\mathcal{P}(L)$ 作为一个偏序集(以集包含关系为序)由一些互不相交的最多含有两个元的链组成.

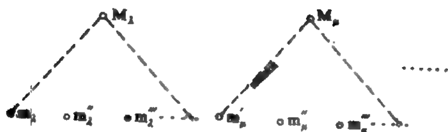
证明. 事实上, 由定理 7.7, 定理中所说的条件是 L 正则的条件. 根据定理 2.3 和 2.4, 它也是 L 是双 Stone 格的条件. 】

到此为止,我们可以利用偏序集 P(L)的不同型式来帮助我们对迄今已知的一些重要 p 代数类有一个直观的印象. 在下列图示中,M 表示极大素理想,m 表示极小素理想.

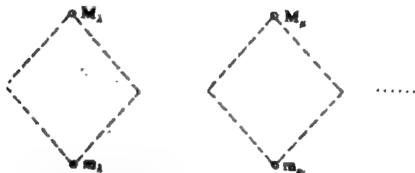
Stone 代数



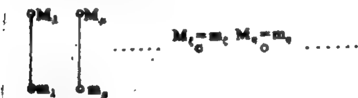
对偶 Stone 代数



双 Stone 代数



Lukasiewice 三值代数



Boole 代数

$M_1 = m_1$　　$M_\mu = m_\mu$　　......

图 51

作为本节的结束,介绍两类特殊的 Lukasiewicz 三值代

数.

定义 5. Lukasiewicz 三值代数 L 称为是有轴的，如果有元 $a \in D^{+}(L)$ 对一切 $x \in L$ 都有 $a^{**} \vee x^{++} \geqslant x^{**}$. 元 a 称为 L 的轴.

定理 6. Lukasiewicz 三值代数 L 有轴并且以元 a 为轴的充要条件是 $D^{+}(L)=\{a\}$

证明. 先设 L 有轴 a，我们只需证明对一切 $y, y^{+}=1$，都有 $y \leqslant a$. 事实上，按轴 a 的定义有 $a^{**} \geqslant y^{**}$，从而 $(a \wedge y)^{**}=y^{**}$. 由于 $y^{++}=0$，又有 $(a \wedge y)^{++}=a^{++} \wedge y^{++}=y^{++}$ 由 L 的正则性知道 $a \wedge y=y$，即 $y \leqslant a$. 故条件是必要的.

反过来，设已知 $D^{+}(L)=\{a\}$，当然有 $a^{+}=1$. 对一切 $x \in L$，由于 $x^{++} \in B^{+}(L)=B^{*}(L)$，$a^{**} \vee x^{++}=a^{**} \vee x^{++**}=(a \vee x^{++})^{**}$. 我们来证 $a \vee x^{++} \geqslant x$. 由于 $x \geqslant x^{++}$ 又它们有相同的对偶伪补，有 $c \in D^{+}(L)$（从而 $c \leqslant a$）使得 $x=x^{++} \vee c$（参看习题）. 由此得到 $a \vee x^{++} \geqslant x$，从而有 $a^{**} \vee x^{++} \geqslant x^{**}$. 】

定义 7. Lukasiewicz 三值代数 L 称为是有心的，如果有元 $c \in L$ 满足条件 $(c^{+} \wedge c) \vee c^{*}=c$. 元 c 称为 L 的心.

定理 8. 双 Stone 代数 L 是一个有心的 Lukasiewicz 三值代数并以元 c 为心的充要条件是 $D^{*}(L) \cap D^{+}(L)=\{c\}$.

证明. 设 L 是有心 c 的 Lukasiewicz 三值代数. 由于 $c=(c^{+} \wedge c) \vee c^{*}$，有 $c^{*}=(c^{+*} \vee c^{*}) \wedge c^{**}=c^{+*}=c^{*} \wedge c^{+*}=(c \vee c^{+})^{*}=1^{*}=0$，$c=c^{+} \wedge c$，$c^{+}=1$. 就是说，有 $c \in D^{*}(L) \cap D^{+}(L)$. 于是按推

论 7.6, $D^*(L)\cap D^+(L)=\{c\}$.

反过来，如果已知 $D^*(L)\cap D^+(L)=\{c\}$，则按定理 7.5，双 Stone 代数 L 是正则的，从而它是一个 Lukasiewicz 三值代数. 由于 $c^*=0, c^+=1$，我们有 $c=(c^+\wedge c)\vee c^*$，即 c 是 L 的心.]

第四章习题

1. 证明任意有界链都是分配的伪补格.

2. 证明如果格 L 的任何区间 [a,b] 都是伪补格，则 L 是分配格.

3. 设L是有界分配格. 对 $I\in I(L)$，令

$$I^*=\{x\in L \mid 对一切 i\in I 有 x\wedge i=0\}.$$

证明 I^* 是伪补格 $I(L)$ 中元 I 的伪补. $M\in \mathcal{P}(L)$ 是极小素理想的充要条件是 $x\in M \Rightarrow (x]^*\nsubseteq M$.

4. 证明对伪补格的任意元 a,b，总有 $a^{**}\dot{\vee}b^{**}=(a\dot{\vee}b)^{**}$.

5. 证明对任意伪补交半格 L, $a,b\in L$，有

$$(a\wedge b)^*=(a^{**}\wedge b)^*=(a^{**}\wedge b^{**})^*.$$

6. 证明 (2,1,0) 型代数 $L=(L;\ \wedge,{}^*,0)$ 是伪补交半格的充要条件是：对任意 $a,b,c\in L$ 有以下等式成立：

(i) $a\wedge a=a$,

(ii) $a\wedge b=b\wedge a$,

(iii) $a\wedge(b\wedge c)=(a\wedge b)\wedge c$,

(iv) $0\wedge a=0$,

(v) $a \wedge (a \wedge b)^* = a \wedge b^*$,

(vi) $a \wedge 0^* = a$,

(vii) $0^{**} = 0$.

7. 证明存在任意大的伪补格 L 使 $B(L) = \{0,1\}$.

8. 设 L_1, L_2 是分配的 p 代数，φ: $L_1 \to L_2$ 是 $\{0,1\}$ 同态. 证明 φ 是代数同态的充要条件是

$$\varphi(B(L_1)) \subseteq B(L_2),\ \varphi(D(L_1)) \subseteq D(L_2).$$

9. 证明第二同构定理(定理I.4.12)对 p 代数也成立.

10. 证明 (2,2,1,0,0) 型代数 $L = (L;\ \vee, \wedge, ^*, 0, 1)$ 是分配的 p 代数的充要条件是 L 为一有界分配格 (最小元 0 最大元 1), 并对任意元 $a, b \in L$ 有以下等式成立:

(i) $a \wedge a^* = 0$,

(ii) $a \vee a^{**} = a^{**}$,

(iii) $(a \vee b)^* = a^* \wedge b^*$,

(iv) $(a \wedge b)^{**} = a^{**} \wedge b^{**}$,

(v) $0^* = 1$.

11. 设 L 是有界分配格. 证明 L 是 Stone 代数的充要条件是可以在 L 上定义一个一元运算 * 使得对一切 $a, b, c \in L$ 有以下关系成立:

$$a \wedge b \leqslant c \leqslant a \vee b \Rightarrow c \wedge b^* \leqslant a \leqslant c^{**} \wedge b^*$$

12. 证明伪补分配格 L 是 Stone 代数的充要条件是对任意 $a, b \in L$ 有 $(a \vee b)^{**} = a^{**} \vee b^{**}$.

13. 验证定理 3.6 的证明中，映射 φ 满足条件:

$$\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y),\ x, y \in L.$$

14. 验证定理 4.1 证明中的同构式

$$L / \sim \cong B(L).$$

15. 设 L 是 Stone 代数． 证明当 $a,b \in B(L)$ 又 $a \leqslant b$ 时，映射 $x \to (x \vee a^*) \wedge b$ 是从 F_a 到 F_b 的一个嵌入．

16. 用 §4 中的记号，并简记 $B(L), D(L), \varphi(L)$ 为 B, D, φ. 证明

(i) $a \in B, d \in D \Rightarrow \rho_a(d) = d$ 的充要条件是 $d \in \varphi(a)$.

(ii) $a \in B, d \in D \Rightarrow \rho_a(d) \geqslant d$,

(iii) $a \in B, d \in D \Rightarrow \rho_a(d) \wedge \rho_{a^*}(d) = d$,

(iv) $a, b \in B, x \in L \Rightarrow \rho_b(\rho_a(x)) = \rho_{a \wedge b}(x)$,

(v) $a, b \in B, d \in D \Rightarrow \rho_a(d) \wedge \rho_b(d) = \rho_{a \vee b}(d)$, 又 $\rho_a(d) \vee \rho_b(d) = \rho_{a \wedge b}(d)$.

17. 设 L 是 Stone 代数． 证明对 $(a,x),(b,y) \in L$, 这里 $x = x_1 \vee a^*, y = y_1 \vee b^*, a,b \in B(L), x_1 \in F_a, y_1 \in F_b$, 有

$$(a,x) \wedge (b,y) = (a \wedge b, \rho_b(x) \wedge \rho_a(y)).$$

18. 证明对 Stone 代数 L, 当 $a \in B(L), y \in D(L)$ 时，有

$$[\rho_a(y)) = \varphi(L)(a) \wedge [y)$$

19. 证明对模 p 代数 $L, a, b \in L$ 有： $a \overset{*}{\sim} b$ 的充要条件是存在 $d \in D^*(L)$ 使得 $a \wedge d = b \wedge d$. 对偶地对模对偶 p 代数 $L, a, b \in L$, 有： $a \overset{+}{\sim} b$ 的充要条件是有 $e \in D^+(L)$ 使得 $a \vee e = b \vee e$.

20. 证明 $\sim = \overset{*}{\sim} \cap \overset{+}{\sim}$ 是双 p 代数的同余关系.

21.* 证明定理 7.5 中的(iii) $\Rightarrow$ (iv).

参考文献

G.Birkhoff, *Lattice Theory*, Amer.Math.Soc., Providence,R.I., 第二版 1948, 第三版 1967.

C.C.Chen–G.Gratzer, *Stone Lattices I. Construction theorems*, Canad. J. Math., 21(1969), 884–894

P.Crawley–R.P.Dilworth, *Algebraic Theory of Lattices*, Prentice–Hall, Engelwood Cliffs, N. J., 1973

G.Gratzer, *Lattice Theory: First Concepts and Distributive Lattices*, Freeman, San Francisco, Cal., 1971

G.Gratzer, *General Lattice Theory*, Academic Press, N. Y., 1978

G.Gratzer–E.T.Schmidt,*On a problem of M.H.Stone*, Acta, Math. Acad. Sci. Hungar., 8(1957), 455–460.

H.Herms, *Einführung in de Verbandstheovie*, Springer –Verlag, 1955

T.Katrinak, *p–algebras*, Collog, Math. Soc. Janos Bolyai 33. Contrib. Lattice Theory, Szeged(Hungary), 1980, 549–573.

T. Katrinak–P. Mederly, *Construction of modular p–algebras*, Alg. Univ, 4 (1974), 301–315

T. Katrinak–P. Mederly, *Construction of p–algebras*, Alg. Univ, 17 (1983), 288–316.

中山正 (董克诚译), 格论, 上海科技出版社, 1964.

D. E. Rutherford, *Introduction to Lattice Theory*,

Oliver & Boyd, Edinburgh and London, 1965

R. Sikorski, *Boolean Algebras*, Academic Press, N. Y., 第二版, 1964

J. C. Varlet, *On the characterization of Stone lattices*, Acta Sci. Math. (Szeged), 27 (1966), 81–84

J. C. Varlet, *Algebres de Lukasiewicz trivalentes*, Bull. Soc. Sci. Royal Sci. Liege, 36 (1968), 399–408

J. C. Varlet, *Constrctions surles algebres de Lukasiewicz trivalentes*, Bull. Soc. Sci. Royal Sci. Liege, 38 (1969), 462–469

J. C. Varlet, *A regular variety of type* {2,2,1,1,0,0}, Alg. Univ., 2 (1972), 218–223.

吴润衡，素理想与同余关系（待发表）.

赵萃魁，布尔代数和补模格的证明，内蒙古大学学报(自然科学)，14 (1983)，291–292.

索引

(按汉语拼音排序)

B

C

D

F

G

H

J

K

L

M

N

P

Q

S

T

W

X

Y

Z